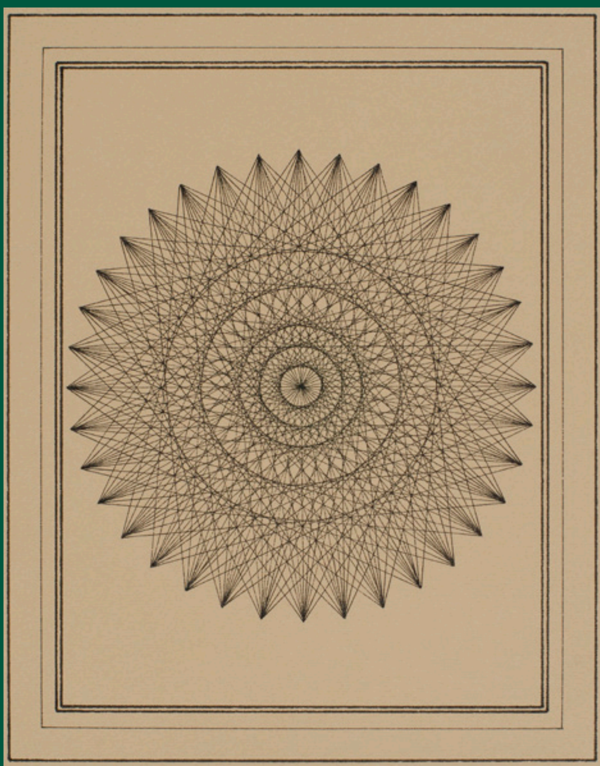
MENS AGITAT
Colloquia

La matematica a Bologna dal dopoguerra

Contributi scelti



a cura di Pierluigi Contucci

Bologna
University Press

MENS AGITAT

— *Colloquia* —

Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna

Fondazione Bologna University Press
Via Saragozza 10 – 40123 Bologna
tel. (+39) 051 232 882
fax (+39) 051 221 019

www.buponline.com
email: info@buponline.com

© 2023 Autori

Opera pubblicata con licenza CC BY-4.0

ISBN: 979-12-5477-374-1
ISBN online: 979-12-5477-375-8
DOI: 10.30682/9791254773758

In copertina: Lucio Saffaro, *Poligono estratto del 36° ordine con 5 cerchi concentrici. Tractatus Logicus Prospecticus*, 1967 (Fondazione Saffaro, Bologna)

Coordinamento editoriale: Angela Oleandri

Impaginazione: CompoMat srl

Prima edizione: dicembre 2023

La matematica a Bologna dal dopoguerra

Contributi scelti

a cura di Pierluigi Contucci

Bologna
University Press

Sommario

Dedicato a Sandro Graffi
per il suo 80esimo compleanno

Premessa

Le storie generali di Bologna, anche le più recenti, hanno dedicato un modesto rilievo all'Università con il risultato di mettere in secondo piano uno degli elementi che le hanno conferito una dimensione e una fama internazionali. Quelle dedicate in particolare a questa presenza, lo hanno fatto illustrando la sua vicenda istituzionale, l'eterogenea provenienza degli studenti di altre città e di altri paesi e l'eccellenza dei suoi maestri. Solo alcune hanno sottolineato l'intensa attività scientifica che si è svolta per secoli nei suoi laboratori e nelle sue biblioteche. Per chi intende raccontare la vera storia della nostra università è decisivo intrattenersi a lungo e dettagliatamente su questo argomento. I pochi studi che vi si sono dedicati sono legati soprattutto alle numerose pubblicazioni che hanno accompagnato le celebrazioni del IX Centenario dell'Alma Mater, ma anch'essi si sono spinti raramente oltre la prima metà del ventesimo secolo. L'Accademia delle Scienze dell'Istituto non ha ritenuto di poter supplire a questa reticenza, o meglio, a questo timore della contemporaneità, ma non si è sottratta al compito di spronare i suoi soci a riflettere su questo argomento e a promuovere piccoli colloqui dedicati esclusivamente alla ricostruzione dell'attività scientifica e alle sue connessioni con il contesto nazionale e internazionale senza per ciò trascurare i rapporti con le realtà istituzionali del territorio e le esigenze della vita quotidiana della nostra comunità.

Sono nati da questa esigenza e da questa disponibilità una serie di colloquia disciplinari che hanno ricapitolato esperienze, scuole e maestri restituendo così l'ampia rete di connessioni e di relazioni che si sono sviluppate nel secondo dopoguerra e che hanno collocato l'ateneo bolognese tra i protagonisti della ricerca internazionale rendendo i suoi ricercatori portatori, non sempre consapevoli, di innovazioni delle quali oggi cogliamo ancora l'originalità e la fecondità.

I risultati di questi colloqui, che hanno interessato la fisica, l'astronomia, la medicina, la biologia, la chimica, la geologia, l'economia e la statistica, l'ampia area delle discipline umanistiche, l'ingegneria, la matematica, il diritto e le scienze politiche e sociali, saranno proposti al pubblico dei lettori in agili volumi che non intendono proporsi come una storia completa dello sviluppo della ricerca scientifica a Bologna quanto piuttosto mettere a disposizione materiali preziosi, vicende di maestri e dispiegarsi di scuole, memorie di imprese e di innovazioni sottratte all'oblio, indispensabili per chi vorrà cimentarsi nell'impresa più ampia di ricostruire la lunga sequenza di ricerche che ha dato una rilevanza planetaria all'Alma Mater Studiorum e della quale si avverte la mancanza.

Walter Tega

Professor Emerito, Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
Già Presidente dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna

Prefazione

Vorrei anzitutto ringraziare il Presidente dell'Accademia delle Scienze, il Prof. Luigi Bolondi, per avermi affidato il compito di coordinare questo numero dei Colloquia dedicato alla Matematica. Insieme abbiamo deciso che doveva essere un percorso scelto di contributi in questa disciplina a Bologna che coprisse il periodo del secolo scorso a partire dal secondo dopoguerra.

La lettura dei sei splendidi interventi, scritti da chi ha contezza diretta dei temi trattati e dei ricercatori coinvolti, è stato per me come un viaggio nel tempo in cui ritrovare le origini della cultura che vive nel mio Dipartimento. Essi spaziano dalla fisica-matematica all'algebra e la geometria, dall'informatica all'analisi numerica e all'analisi matematica. Nel loro insieme mostrano un ambiente scientifico brillante e creativo in tante direzioni, di livello internazionale, capace di continuare la prestigiosissima tradizione che lo caratterizza.

È un piacere quindi ringraziare tutti gli autori per il loro lavoro che rende questa collezione di sicuro interesse sia per i cultori di matematica che per gli accademici in generale.

Settembre 2023 *Pierluigi Contucci*

Dario Graffi e la sua influenza sulla Fisica Matematica

Franca Franchi, Brian Straughan***

Questo articolo fa una rassegna dei principali settori in cui il Professor Dario Graffi ha dato notevoli contributi alla Fisica Matematica e nei quali la sua influenza ha portato a ulteriori sviluppi.

1. Introduzione

Grazie alla sua personalità carismatica, alle sue eccezionali doti per la ricerca scientifica, e all'altissimo livello delle sue attività didattiche, il Professor Dario Graffi rappresenta una delle figure più eminenti dell'ateneo bolognese. Siamo molto grati all'Accademia delle Scienze di Bologna per averci concesso il privilegio di poter approfondire alcuni aspetti dei suoi più significativi risultati, che hanno avuto subito un riconoscimento internazionale e che sono a tutt'oggi un imprescindibile riferimento per le ricerche attuali. Riprendendo le sue opere, si rimane ammirati non solo per la genialità delle sue tante intuizioni, ma anche per la svolta rivoluzionaria che ha impresso al modo di fare ricerca in Fisica Matematica.

Le nostre analisi si basano principalmente sugli studi dopo la seconda guerra mondiale, e quindi non ci sarà spazio per quel lavoro, Graffi [52], Fabrizio [32], in cui intuisce che con l'azione combinata di ereditarietà e di effetti non lineari, si può arrivare a creare, o ad "abbozzare", come dice lui, una nuova teoria matematica del cosiddetto fenomeno Lussemburgo-Gorky, rilevato sperimentalmente per la prima volta solo tre anni prima. Interessante poi la chiosa finale che "umilmente" rimanda a nuove evidenze osservative il "collaudo" della validità del suo modello. Queste ricerche hanno avuto un'immediata e ampia risonanza, e sono state riprese da numerosi studiosi della comunità scientifica internazionale.

Per gli stessi motivi, non ci concentriamo sui suoi fondamentali lavori nell'ambito della meccanica non lineare, ovvero su quelle sue ricerche pionieristiche sui sistemi dinamici, Graffi [56], che hanno ricevuto subito grandi apprezzamenti. Questi contributi, in cui

*Dipartimento di Matematica, Alma Mater Studiorum – Università di Bologna.
E-mail: franca.franchi@unibo.it
**Department of Mathematics, University of Durham, UK. E-mail: brian.straughan@durham.ac.uk

le sue competenze matematiche interagiscono perfettamente con la sua sensibilità fisica, sono stati ripresi da numerosi autorevoli studiosi, non solo in Italia. Fra tutti vogliamo segnalare due nomi importanti, delle scuole di Princeton e di Kiev, Cesari e Mitropolsky, con i quali Graffi stringe un'amicizia, profonda e duratura; vedi per esempio Cesari [16], Cesari e Kannan [17].

Pensando a dei "colloqui matematici", abbiamo cercato di evidenziare l'influenza che Graffi ha avuto sulla Fisica Matematica, concentrandoci sulle altrettanto fondamentali questioni legate ai teoremi di unicità, agli aspetti ereditari in elettromagnetismo, ai modelli di diffusione e di inquinamento, agli imprescindibili teoremi di reciprocità, ai risultati in ottica non lineare, concludendo con le ultime sue ricerche in viscoelasticità lineare.

2. Unicità in fluidi incomprimibili e in elasticità

Prima del 1959 i teoremi di unicità per le equazioni di Navier-Stokes in un dominio illimitato supponevano che la soluzione decadesse abbastanza rapidamente all'infinito; che per esempio la velocità $v_i(\mathbf{x}, t)$ fosse una funzione L^2 nel dominio illimitato. In un dominio spaziale illimitato la richiesta della sola limitatezza della velocità e delle sue derivate è più debole della richiesta della quadratica integrabilità secondo Lebesgue. Graffi [60, 63] ha escogitato un metodo ingegnoso per mostrare che la soluzione delle equazioni di Navier-Stokes per un fluido linearmente viscoso incomprimibile è unica, purché rimanga limitata insieme con le sue derivate prime spaziali e che la differenza di pressione di due soluzioni decada come $O(1/r)$ quando la variabile spaziale $r = \sqrt{x_i x_i}$ tende all'infinito, nel caso in cui il dominio spaziale illimitato sia l'esterno di un dominio limitato Ω_0 in $\mathbb{R}^3$.

Questo lavoro di Graffi ha avuto una profonda influenza sulle successive ricerche in questo campo; perciò richiamiamo molto brevemente il suo ragionamento. In termini della velocità $v_i(\mathbf{x}, t)$ e della pressione $p(\mathbf{x}, t)$, le equazioni di Navier-Stokes si possono scrivere

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \Delta v_i + f_i, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{1}$$

dove f_i è una forza esterna assegnata. Usiamo la notazione indiciale assieme alla convenzione di Einstein sugl'indici ripetuti. In (1) abbiamo assunto, senza perdere in generalità per l'unicità, che la viscosità cinematica e la densità valgano uno. Sia Ω_0 un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$ e sia Ω il suo complemento, cioè $\Omega = \mathbb{R}^3 - \Omega_0$. Sia $B(0, R)$ la sfera in $\mathbb{R}^3$ di raggio R. Denotiamo la superficie di questa sfera con Γ_R, e supponiamo che R_0 sia il minimo valore di R che include Ω_0. Sia poi Ω_R il domino $B(0, R) - \Omega_0^-$ e chiamiamo Γ_0 la frontiera di Ω_0.

Le equazioni (1) sono definite in $\Omega \times (0, T)$, dove $(0, T)$ è un intervallo temporale, e su Γ_0 supponiamo che siano assegnati i valori di v_i; pertanto le condizioni al contorno sono

$$v_i(\mathbf{x},t) = v_i^B(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_0. \tag{2}$$

Le condizioni iniziali sono

$$v_i(\mathbf{x},0) = \hat{v}_i(\mathbf{x}), \tag{3}$$

dove v_i^B e $\hat{v}_i$ sono funzioni assegnate. Denotiamo con $\mathcal{P}$ il problema ai valori inziali e al contorno sopra definito.

Per descrivere la dimostrazione dell'unicità data da Graffi, supponiamo che ci siano due soluzioni (v_i, p) e (w_i, q) del problema $\mathcal{P}$ per la stessa forza esterna **f**, e per gli stessi valori al bordo e iniziali $v_i^B, \hat{v}_i$. Definiamo la soluzione differenza (u_i, ϖ) mediante $u_i = v_i - w_i,\ \varpi = p - q$. Si può allora dimostrare che la soluzione differenza soddisfa il seguente problema di valori al bordo e iniziali

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial \varpi}{\partial x_i} + \Delta u_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \tag{4}$$

con condizioni al bordo e inziali omogenee:

$$u_i(x,t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0,\ t > 0; \qquad u_i(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \tag{5}$$

In aggiunta Graffi [63] richiede le limitazioni

$$|\mathbf{v}| \le N, \quad |\mathbf{w}| \le N, \quad |\nabla \mathbf{v}| \le N, \quad |\nabla \mathbf{w}| \le N, \quad |\varpi| \le \frac{H}{r}, \quad \text{per } r \to \infty. \tag{6}$$

In (6) N e H sono costanti assegnate.

La dimostrazione di Graffi è completamente diversa da qualsiasi altro metodo precedente, e si basa sulla funzione $G(R)$ definita da

$$G(R) = \int_0^h \int_{\Omega_R} u_i u_i \, dx\, dt + \int_0^h \int_0^t \int_{\Omega_R} |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dx\, d\eta\, dt. \tag{7}$$

Egli mostra che G soddisfa la disuguaglianza differenziale

$$G(R) \le c_1 G'(R) + c_2 \sqrt{G'(R)}. \tag{8}$$

Da qui, applicando un abile ragionamento per assurdo, deduce l'unicità.

Il teorema di unicità di Graffi è stato esteso al caso delle equazioni di Navier-Stokes con effetti magnetici, cioè alla magnetoidrodinamica, da Ferrari [36] e da Dyer e Edmunds [29]. Entrambi gli articoli hanno limitazioni sulla soluzione e stime sulla pressione simili a quelle di Graffi [63]. Tuttavia Ferrari assume che sia assegnata sulla frontiera per tutti i tempi la componente tangenziale del campo magnetico, mentre Dyer e Edmunds suppongono che il campo magnetico e la componente tangenziale del campo elettrico siano continui su Γ_0. (È degno di nota il fatto che il lavoro di Dyer e Edmunds [29] sia stato comunicato da Dario Graffi quando faceva parte del prestigioso comitato editoriale della rivista *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Un altro notevole articolo comunicato da Graffi quando faceva parte del comitato editoriale della stessa rivista è quello di Pignedoli [96].) Edmunds [31] ha adottato la tecnica di Graffi per ottenere un analogo teorema di unicità per le equazioni di Navier-Stokes all'indietro nel tempo, indebolendo la condizione sulla differenza di pressione a una della forma $|\varpi| = O(r^{-1/2-\epsilon})$. Applicando una modifica del metodo di Graffi [63], Knightly [84] ha generalizzato la classe di regolarità dei teoremi di unicità di Graffi. Edmunds [31] studia, *inter alia*, il comportamento asintotico della soluzione in un dominio esterno. Cannon e Knightly [10] stabiliscono risultati di dipendenza continua per le equazioni di Navier-Stokes in un dominio esterno, utilizzando la tecnica di Graffi con le limitazioni (6) per la soluzione, indebolendo ulteriormente la condizione sulla pressione alla forma $|\varpi| = O(r^{-1/2})$. Ulteriore uso della tecnica di Graffi è stato fatto da Straughan [100] che ha stabilito la dipendenza continua della soluzione delle equazioni di Navier-Stokes accoppiate alle equazioni di diffusione per la temperatura e per una concentrazione di sale. Qui si usano le stime sulla pressione di Edmunds [30] e/o quelle di Cannon e Knightly [10], anche se si permette che la soluzione cresca in r.

La questione su quale sia la migliore condizione da imporre sulla differenza di pressione è stata risolta in un articolo molto interessante di Galdi e Maremonti [43], i quali hanno dimostrato che l'unicità continua a valere per $|\varpi| = O(r^{1-\epsilon})$, $\epsilon > 0$, ma è possibile la non-unicità quando $\epsilon = 0$. Quando $\Omega \equiv \mathbb{R}^3$, citano il seguente controesempio:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sin\, t\,(1, 0, 0), \quad \varpi(\mathbf{x}, t) = -x\, \cos t.$$

La questione dell'unicità per le equazioni di Navier-Stokes all'indietro nel tempo in un dominio illimitato è affrontata da Galdi e Straughan [44], i quali hanno dimostrato che l'unicità vale se $u_i \in L^{6-\epsilon}(\Omega), u_{i,t} \in L^{6-\epsilon}(\Omega), p = O(r^{1-\epsilon}), \nabla p = O(r^{1-\epsilon})$.

Nella prossima sezione vedremo che Graffi usa la sua tecnica per stabilire l'unicità nel caso di un fluido comprimibile in un dominio esterno. Questo lavoro è molto complicato e impiega una "energia" per definire la quale non si usano solo gl'integrali L^2 della soluzione, ma è necessario introdurre integrali con peso. I pesi sono opportune combinazioni della densità non costante. Il lavoro di Graffi [60, 63] indubbiamente ha influenzato le ricerche del gruppo di Napoli guidato dal Professor Salvatore Rionero, dove viene usata un'energia pesata, in cui la funzione peso dipende dalla variabile spaziale r.

Il metodo di Graffi è stato applicato alle equazioni dell'elastodinamica lineare micropolare da Knops e Straughan [85]. Naturalmente con la stessa tecnica si può dedurre l'unicità nell'elastodinamica classica.

Osserviamo che Beevers [7] è un interessante articolo che combina il metodo di Graffi con un metodo di Protter di un'energia pesata nel tempo, v. p. es. Lees e Protter [86], Murray e Protter [92]. Questo lavoro stabilisce la dipendenza continua dai dati in un dominio esterno per una teoria della conduzione del calore dipendente dalla storia.

3. Unicità in fluidi comprimibili

Per il caso di un dominio spaziale limitato Graffi [57] è un rinomato articolo che stabilisce l'unicità di una soluzione delle equazioni che governano il flusso in un fluido comprimibile. Questo articolo è stato apprezzato da molti autori di spicco, come Serrin [99] che scrive ... Graffi [57] *showed that the initial value problem for compressible fluids is unique, ... Our work is an extension of Graffi's, ...* Padula [94] scrive ... *During the last twenty years, the well - posedness theory for viscous compressible fluids has received remarkable contributions from the early papers of D. Graffi on uniqueness* Graffi [57, 62] ... Padula [95] scrive anche *One of the most interesting and admittedly difficult problems within the mathematical theory of fluid mechanics is the question whether the equations governing the motion of a compressible gas are well - posed. ... For the initial - boundary value problem in the viscous case, particular attention should be paid to the paper of* Graffi [57] ... Valli [107] scrive ... *Compressible viscous fluids have been studied in the last thirty years. The first result was a uniqueness theorem proved by* Graffi [64]. In un articolo comunicato dalla medaglia Fields P.L. Lions, Li [87] scrive che *Mathematical studies on the compressible Navier-Stokes equations started with the uniqueness results by* Graffi [57] *in 1953 for barotropic fluids ...*

Abbandonando il caso del dominio limitato, Graffi [62, 61] (v. anche le opere scelte Graffi [75] pag. 255-262, Graffi [74] pag. 273-280) estende la sua tecnica per dimostrare l'unicità per fluidi incomprimibili in un dominio illimitato al sistema, più complicato, per il flusso di un fluido comprimibile. Questo è un risultato molto bello, il suo lavoro è altamente tecnico e coinvolge una combinazione molto abile e intricata di termini delle equazioni in oggetto. Arrivare alla disuguaglianza finale richiede una combinazione del tutto non banale di termini che essenzialmente fanno intervenire integrali "pesati" con funzioni della densità.

Le equazioni fondamentali per il flusso comprimilbile usate da Graffi [61] si possono scrivere come

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \\ &\rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i(\rho), \end{aligned} \tag{9}$$

dove ρ, v_i sono la densità e la velocità del fluido, $p = p(\rho)$ è la pressione, $f_i(\rho)$ è un termine di forza esterna, e τ_{ij} è il tensore aggiuntivo degli sforzi di Cauchy. Questo tensore ha la forma seguente

$$\tau_{ij} = \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{3}(\lambda - 2\mu)u_{r,r}\delta_{ij}\,.$$

Graffi suppone che ci siano due soluzioni (v_i, ρ) e $(v_i + v_i^1, \rho + \rho^1)$ delle equazioni (9). Non diamo dettagli della dimostrazione, ma essenzialmente essa coinvolge la funzione di

Graffi $G(R)$, definita da

$$G(R)=\int_0^h\int_{\Omega_R}(\rho_1^2+|\mathbf{v}_1|^2)dxdt+k\int_0^h\int_0^t\int_{\Omega_R}\Big(\mu|\nabla\mathbf{v}_1|^2+\Big(\frac{\mu+\lambda}{3}\Big)|\nabla\cdot\mathbf{v}_1|^2\Big)dxd\eta dt$$

dove k è una costante che appare a causa delle limitazioni sulla soluzione. Egli dimostra che G soddisfa la disuguaglianza

$$G(R)\leq\eta\, G'(R)\,,$$

per un'opportuna costante η. La dimostrazione si conclude di nuovo con un ragionamento per assurdo.

Graffi [62], v. anche la raccolta delle opere Graffi [75], migliora il suo risultato appena descritto prendendo per la pressione la relazione classica $p=a\rho^\gamma$. In effetti la sua dimostrazione dell'unicità in questo caso è tecnicamente molto abile e richiede un'accurata interazione tra le varie disuguaglianze in gioco.

Graffi [62] suppone che (ρ,v_i) e $(\rho+\rho_1,v_i+v_i^1)$ siano due soluzioni. La funzione di Graffi che deriva è

$$G(R)=\int_0^h dt\int_S\Big(v_1^2+\frac{b}{2}\big[\rho^{\gamma-3}+(\rho+\rho_1)^{\gamma-3}\big]\rho_1^2\Big)dx\,, \tag{10}$$

dove $b>0$ è una costante opportuna.

Il metodo di Graffi [62] è usato da Straughan [101] pag. 82-93 per stabilire l'unicità in un modello di propagazione del suono in mezzi porosi.

4. Flusso di calore ritardato e le teorie dell'elettromagnetismo

L'equazione classica del bilancio dell'energia in un conduttore rigido di calore in un dominio 3D è

$$\rho c\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\,, \tag{11}$$

dove ρ e c sono la densità e il calore specifico del solido, θ è la temperatura e **q** è il vettore flusso di calore. Nella teoria classica questo sistema viene completato specificando un'equazione costitutiva per **q** che generalmente si scrive

$$q_i=-k\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,, \tag{12}$$

dove k è la conduttività termica del solido e (12) è la legge di Fourier.

Cattaneo [15] ha usato argomenti di meccanica statistica per sostituire l'equazione (12) con una della forma

$$\tau \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_i = -k \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\,, \tag{13}$$

dove $\tau > 0$ è un coefficiente di rilassamento. Così l'equazione costitutiva stazionaria (12) viene sostituita con un'equazione evolutiva per q_i. Il sistema di Cattaneo

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\,, \qquad \tau \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + q_i = -k \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\,, \tag{14}$$

è attualmente molto famoso nella matematica applicata e conduce a un'equazione iperbolica, del tipo onde smorzate, per la temperatura, al posto dell'equazione parabolica della teoria classica. Se usiamo un fattore integrante in (13), si vede che per un materiale con *fading memory* si ha

$$q_i(\mathbf{x}, t) = -\frac{k}{\tau} \int_{-\infty}^{t} \exp\Big[-\Big(\frac{t-s}{\tau}\Big)\Big] \frac{\partial \theta}{\partial x_i}(\mathbf{x}, s) ds.$$

In questo modo l'equazione di Cattaneo introduce, nel vettore flusso di calore, una dipendenza dalla storia passata del gradiente di temperatura.

Nell'ambito dei mezzi elettromagnetici, Graffi [51] ha introdotto qualcosa di simile, sebbene dodici anni prima, ma per i vettori densità di corrente e spostamento elettrico come funzioni del campo elettrico $\mathbf{E}$.

Per fare questo Graffi [51] ha proposto un sistema di equazioni eettromagnetiche che generalizzano la teoria classica. Graffi [51] afferma che in un mezzo al di fuori di un'antenna sussistono la legge di Faraday e la legge di Ampère con la corrente di spostamento di Maxwell, cioè

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\mathrm{curl}\,\mathbf{E}, \qquad \mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \tag{15}$$

dove $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{H}, \mathbf{j}$ e $\mathbf{D}$ sono, rispettivamente, il campo elettrico, l'induzione magnetica, il campo magnetico, la densità di corrente e lo spostamento elettrico. Nell'elettromagnetismo classico la densità di corrente e lo spostamento elettrico sono legati a $\mathbf{E}$ dalla legge di Ohm

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{16}$$

e dalla relazione costitutiva

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \tag{17}$$

dove σ è la conduttività elettrica e ϵ è la permittività dielettrica.

Graffi [51] propone una teoria in cui $\mathbf{j}$ e $\mathbf{D}$ dipendono dalla storia del campo elettrico $\mathbf{E}$, e come giustificazione sperimentale nota che, per esempio, alcuni materiali manifestano fenomeni di isteresi dielettrica. Egli generalizza (16) e (17) alle forme

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} + \int_0^t \beta(t-s)\mathbf{E}(s) ds, \qquad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} + \int_0^t \gamma(t,s)\mathbf{E}(s) ds \tag{18}$$

dove le funzioni β e γ descrivono la dipendenza funzionale dalla storia. Si può derivare la seconda equazione di (18) per vedere che

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{t}} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{t}} + \gamma(t,t)\mathbf{E}(t) + \int_0^t \gamma'(t,s)\mathbf{E}(s)ds.$$

Questa espressione viene usata in $(15)_2$ per ottenere l'equazione

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \lambda \mathbf{E} + \int_0^t \alpha(t,s)\mathbf{E}(s)ds, \tag{19}$$

dove, come Graffi [51] osserva, $\lambda(t) = \gamma(t,t) + \sigma \quad \text{e} \quad \alpha(t,s) = \gamma'(t,s) + \beta(t-s)$. Quando si introduce l'equazione costitutiva $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, dove μ è la permeabilità magnetica, nell'equazione $(15)_1$, si ottengono le equazioni di Graffi per i campi elettrico e magnetico

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \lambda \mathbf{E} + \int_0^t \alpha(t,s)\mathbf{E}(s)ds, \quad \mathrm{curl}\,\mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \tag{20}$$

Fabrizio [32] nota che se $\alpha(t,s) \equiv 0$, allora le equazioni (20) sono della stessa forma delle equazioni di Cattaneo (14), anche se per i campi elettrico e magnetico. Straughan [102] nota che $\alpha \equiv 0$ si può ottenere scegliendo $\gamma(t,s) = \gamma_0 e^{-\delta(t-s)}$, $\beta = \beta_0 e^{-\delta(t-s)}$, da cui $\alpha = (\beta_0 - \gamma_0\delta)e^{-\delta(t-s)}$. Se $\beta_0 = \gamma_0\delta$ allora $\alpha \equiv 0$. Nel caso $\alpha \equiv 0$ si può eliminare $\mathbf{H}$ e trovare che $\mathbf{E}$ soddisfa un'equazione del tipo onde smorzate della forma

$$\epsilon E_{i,tt} + \lambda E_{i,t} = \frac{1}{\mu}(\Delta E_i - E_{j,ij}).$$

Graffi [65] continua il suo studio delle equazioni (15) e (18), dove investiga la propagazione delle onde in un mezzo governato da questo sistema di equazioni. Egli mostra che il sistema si può ridurre a una singola equazione per il campo elettrico $\mathbf{E}$, che nel caso unidimensionale ha la forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + 2a\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + (a^2 - b^2)\mathbf{E} - b^2 \int_0^t G(t-s)\mathbf{E}(s)ds = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}\,, \tag{21}$$

dove a, b, c sono costanti e $G(t-s)$ è una specifica funzione di memoria. Questa è un'equazione smorzata delle onde con l'aggiunta di un termine ereditario per descrivere la dipendenza dalla storia di $\mathbf{E}$.

In seguito Graffi [66] trova soluzioni per una forma ridotta delle equazioni (15) e (18), dove la funzione di dissipazione non è direttamente presente, e invece della (21) lavora con l'equazione

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - b^2\mathbf{E} - b^2 \int_0^t G(t-s)\mathbf{E}(s)ds = c^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2}\,. \tag{22}$$

Questa è un'equazione delle onde senza il termine esplicito di smorzamento, ma nondimeno si conserva il termine della storia.

In generale per il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ si definisce la funzione $\mathbf{E}^t(s)$ per descrivere la storia di $\mathbf{E}$ da $t = -\infty$ al tempo presente. Un esempio specifico di questo è

$$\mathbf{E}^t(s) = \mathbf{E}(t - s), \quad 0 \leq s < \infty.$$

La stessa notazione viene usata per $\mathbf{H}^t(s)$. Discutendo relazioni generali dipendenti dalla storia per $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}(t), \mathbf{E}^t(s))$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{H}, \mathbf{H}^t(s))$, Toupin e Rivlin [105] citano Graffi [47, 48] come colui che ha sviluppato queste funzioni di storia in elettromagnetismo.

Straughan [102] utilizza il suggerimento di Fabrizio [32] di sostituire $\mathbf{E}$ con $\mathbf{q}$ e curl $\mathbf{H}$ con $-k\nabla\theta$ per ottenere le equazioni di Graffi-Fabrizio

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\,, \quad \tau \frac{\partial q_i}{\partial t} + q_i + \int_0^t \alpha(t, s) q_i(\mathbf{x}, s) ds = -k \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\,. \tag{23}$$

Quando si usano le equazioni (14) in un corpo continuo in movimento, come un fluido, le derivate temporali si devono sostituire con quelle materiali, e così le equazioni diventano

$$\rho c \Big(\frac{\partial \theta}{\partial t} + v_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \Big) = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i}\,, \quad \tau \Big(\frac{\partial q_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \Big) + q_i = -k \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\,. \tag{24}$$

In questo caso $(24)_2$ è un'equazione di evoluzione e alcuni ritengono che sia una legge di conservazione. C'è un'altra scuola di pensiero che sostiene che, poiché la derivata materiale di q_i non è una quantità oggettiva, $(24)_2$ dovrebbe essere sostituita da un'equazione con una derivata in t che sia oggettiva. Morro [89] sostiene che la derivata materiale di $\mathbf{q}$ potrebbe essere sostituita da una derivata oggettiva generale della forma

$$q_i^{\square} = q_{i,t} + v_j q_{i,j} - \omega_{ij} q_j - \xi d_{ij} q_j - \nu d_{mm} q_i\,,$$

dove ω_{ij} e d_{ij} sono le parti antisimmetrica e simmetrica di $v_{i,j}$, e ξ e ν sono funzioni a valori reali della temperatura e della densità. In effetti egli nota che il caso $\xi = 1, \nu = -1$, è la derivata di Truesdell, Truesdell [106]. Anche Christov [19] suggerisce di usare la stessa derivata. Quando si usa questa derivata in meccanica dei fluidi, la teoria che ne risulta viene di solito chiamata teoria di Cattaneo-Christov, v. p.es. Ciarletta e Straughan [21], Tibullo e Zampoli [104], e questo è un argomento molto ben citato in letteratura. Tenuto conto del fatto che Graffi [51] ha una forma simile di equazioni e che Truesdell ha suggerito la derivata oggettiva, sarebbe appropriato riferirsi a questa teoria come la teoria di Graffi-Truesdell.

Concludiamo questa sezione con un'osservazione che riguarda la versione completamente non lineare del sistema (14) di Cattaneo. Nel caso veramente non lineare i coefficienti nell'equazione di Cattaneo non sono più delle costanti. Questo è stato dimostrato da Coleman *et al.* [24] e da Graffi [72], e la teoria completamente non lineare è stata analizzata in profondità da Franchi [39]. L'argomento di Graffi è stato incluso nel lavoro di Franchi e Straughan [40], ed è elegante nella sua semplicità. Graffi [72] mostra che il caso τ costante non è compatibile con la disuguasglianza ridotta dell'entropia e suggerisce invece l'equazione

$$q = -k(\alpha\theta q_t + \theta_x),$$

dove α è un opportuno parametro positivo. Il procedimento menzionato sopra viene rigorosamente derivato da Franchi [39] nell'ambito della termodinamica estesa irreversibile. Carillo e Jordan [13] analizzano il sistema di equazioni

$$\alpha\theta\mathcal{K}(\theta)\frac{\partial q_i}{\partial t} + q_i = -\mathcal{K}(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\,, \qquad \rho c(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} \tag{25}$$

e si riferiscono a un conduttore rigido governato dalle equazioni (25) come a un conduttore del tipo Graffi-Franchi-Straughan.

5. Diffusione e inquinamento

Il lavoro di Graffi [59] è una nota breve, ma di quelle che lasciano una forte influenza sui lavori successivi. Graffi stabilisce l'unicità in un modello per un fluido incomprimibile non viscoso, ma nel quale la densità può variare e la forza del corpo può dipendere dalla densità. Graffi mette in evidenza che il modello potrebbe essere adatto a un fluido incomprimibile contenente una sostanza disciolta che dia luogo a una concentrazione $c(\mathbf{x}, t)$. Egli afferma che la densità $\rho(\mathbf{x}, t)$ potrebbe essere una funzione lineare della concentrazione, cioè $\rho = \rho_0(1 + c)$.

Il modello scelto da Graffi [59] coinvolge la densità ρ, la velocità $v_i(\mathbf{x}, t)$, la forza $F_i = F_i(\rho, \mathbf{x}, t)$ e la pressione $p(\mathbf{x}, t)$. Le sue equazioni sono

$$\rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i(\rho, \mathbf{x}, t)\,, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial\rho}{\partial x_i} = 0. \tag{26}$$

Kazhikhov e Smagulov [81, 82] hanno studiato una generalizzazione del modello di Graffi che oltre a un termine viscoso include il Laplaciano della densità, e le loro equazioni sono derivate da Franchi e Straughan [41] dal punto di vista di una teoria continua per le miscele. Questi autori si concentrano sul problema di una sostanza disciolta in un fluido nella configurazione di uno strato orizzontale, dove la concentrazione può essere più densa in cima, dando luogo così a moti convettivi. Una tale situazione potrebbe verificarsi sulla Terra dove le particelle d'inquinamento si raccolgono in alto, ma a causa di moti convettivi di rovesciamento questo inquinamento può diffondersi al livello del suolo. I modelli di Graffi e Kazhikhov-Smagulov sono stati ampiamente studiati dal punto di vista dell'esistenza e dell'unicità da Prouse [97], Prouse e Zaretti [98], Beirao da Veiga [8], anche se Beirao da Veiga analizza principalmente un'estensione delle equazioni di Kazhikhov-Smagulov che contiene un termine trascurato da questi autori. Vale la pena di notare che i modelli di Graffi e Kazhikhov-Smagulov sono ancora oggetto di interesse v. Goudon e Vasseur [46], Guillén González *et al.* [78]. In un articolo recente, Straughan [103], è stata analizzata in profondità una doppia diffusione competitiva nella classe dei modelli di Graffi e Kazhikhov-Smagulov, che tiene conto anche delle tensioni interfacciali di Korteweg.

Franchi e Straughan [41] attribuiscono a Graffi una generalizzazione delle equazioni (26) che si può applicare ai moti convettivi di rovesciamento dovuti alla gravità in una striscia orizzontale. Il sistema di Graffi modificato è

$$
\begin{aligned}
&\rho\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu\Delta v_i - \rho g\delta_{i3}\,, \qquad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,\\
&\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \Delta\rho\,.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Franchi e Straughan [41] derivano il numero critico di Rayleigh e il numero critico d'onda per il modello convettivo di rovesciamento sia nella teoria di Graffi che in quella di Kazhikhov-Smagulov. Essi mostrano che un parametro importante è il numero di Graffi $\mathcal{G}$ definito da

$$
\mathcal{G} = \frac{\mu\lambda}{gd^3\rho_L}\,,
$$

dove ρ_L è la densità alla base dello strato.

Ci sono altre generalizzazioni delle equazioni di Graffi (26) che sono comunemente studiate nella letteratura sulla dinamica dei fluidi. Quelle che potrebbero essere chiamate le equazioni di Graffi-Boussinesq omettono il termine Laplaciano in $(27)_3$ e assumono costante $\rho = \rho_0$ il coefficiente dell'accelerazione, evidenziando il fatto che la variazione della densità avviene attraverso il termine *buoyancy*. Queste equazioni vengono usate da Carr *et al.* [14], King *et al.* [83] per modellare le onde interfacciali sul picnoclino tra strati di fluidi con densità diverse. Un'altra generalizzazione delle equazioni di Graffi sono quelle che potrebbero essere chiamate le equazioni di Graffi-Boussinesq con dissipazione, e queste sono le (27) dove il coefficiente del termine di accelerazione è sostituito da ρ_0. Queste equazioni sono utilizzate da Hartharn-Evans *et al.* [79] nel loro lavoro sull'"effetto banco" delle onde interfacciali sul picnoclino tra strati di fluidi con densità diverse.

6. Teoremi di reciprocità

Un'area in cui il lavoro di Graffi ha avuto un successo fondamentale è quella dei teoremi di reciprocità nella Fisica Matematica. Il suo lavoro in questo campo è rappresentato da Graffi [49, 50, 53, 54, 55, 58, 64] e copre i campi dell'elettromagnetismo, dell'elasticità e della trasmissione del calore. Questo è un settore in cui la sua influenza è ancora attiva:

un fatto che è immediatamente evidente dalle applicazioni e dagli sviluppi delle sue idee, oltre che dalle molte citazioni, specialmente in Geofisica, v. p. es. Arntsen e Carcione [4], Douglas *et al.* [28]; in Analisi Numerica e Ingegneria, v. p. es. Nguyen e Tassoulas [93]; in elettroelasticità e piezoelettricità, v. p. es. Amiri Hezaveh *et al.* [2], Ciarletta *et al.* [22], Iesan [80]; in elasticità, v. p. es. Chirita e Ciarletta [18], Madyarov e Guzina [88], Carbonaro e Russo [12], De Hoop e Stam [27]; in acustica, v. p. es. Antes e von Estorff [3]; e nelle miscele dei mezzi continui, v. p. es. Borelli e Patria [9], Ciarletta [20]. Indubbiamente la vasta applicabilità di questo metodo ha condotto al suo grande utilizzo. Per esempio Wheeler e Sternberg [108] scrivono …*we employ the … energy identity to establish sufficient conditions for the prolonged quiescence of the far elastodynamic field belonging to a solution that corresponds to initial quiescence. This result, in turn, supplies the principal tool for a generalization of the dynamical reciprocal theorem of* Graffi [55] *to infinite regions …*

Il punto chiave dell'idea di Graffi è di stabilire una relazione di reciprocità fra due soluzioni di un problema di valori al contorno e/o iniziali per diversi tempi o punti spaziali in un dominio limitato o illimitato. Si può allora riuscire a dedurre informazioni molto utili su una soluzione in una parte meno accessibile del corpo potendo contare sulla soluzione in un'altra parte.

Graffi [53] è davvero notevole perché dimostra teoremi di reciprocità per problemi di valori inziali/al bordo nella teoria elettromagnetica, nell'elasticità e nella teoria della conduzione del calore. La novità è il fatto di includere il tempo, cosicché i problemi sono tutti dipendenti dal tempo, invece di essere in equilbrio.

I teoremi di reciprocità sono diventati sempre più raffinati con il passare del tempo. Infatti Graffi [64] usa una convoluzione invece della trasformata di Laplace, con il risultato di un procedimento più chiaro e diretto. Iesan [80] ha escogitato un ulteriore procedimento ingegnoso che evita l'uso della trasformata di Laplace, eliminando la necessità di incorpore le condizioni iniziali nelle equazioni che reggono il modello. Egli applica la sua idea alla teoria dinamica della piezoelettricità in un corpo elastico. Ulteriori teoremi di reciprocità che coinvolgono l'uso di una convoluzione sono presentati da Ciarletta *et al.* [22] per una teoria della termo-piezoelettricità che include il secondo gradiente dello spostamento e del potenziale elettrico, e in più consente che la temperatura "viaggi" come un'onda con velocità finita.

7. Ottica non lineare

Dario Graffi è stato certamente uno dei maggiori esperti nella risoluzione di difficili problemi di unicità nel campo della Fisica Matematica. In una serie di lavori degli anni settanta stabilisce alcuni risultati di unicità molto interessanti in teorie dei mezzi continui, in presenza di effetti elettromagnetici. In Graffi [68] analizza un sistema di equazioni di Maxwell applicabile a un plasma. Le equazioni sono

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \epsilon\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + Nq\mathbf{v} + \mathbf{J}, \qquad \mathrm{curl}\,\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{28}$$

dove **E** e **H** sono i campi elettrico e magnetico, **v** è la velocità media degli elettroni nel plasma e N è il numero di elettroni per unità di volume. La quantiità q è la carica dell'elettrone, ϵ e μ sono la costante dielettrica e la permeabilità magnetica, e **J** è la densità di corrente. Per completare il sistema si devono aggiungere le leggi di conservazione per gli elettroni e la velocità della forma

$$\frac{\partial N}{\partial t} + v_i\frac{\partial N}{\partial x_i} + N\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0, \tag{29}$$

e

$$Nm\Big(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + Nq\big[\mathbf{E} + \mu\mathbf{v}\times(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H})\big]\,, \tag{30}$$

dove m è la massa dell'elettrone, $\mathbf{H}_0$ è un campo magnetico esterno, e p è la pressione dovuta agli elettroni.

Sotto varie ipotesi Graffi [68] stabilisce l'unicità di una soluzione delle equazioni (28)–(30).

Un altro notevole lavoro è quello di Graffi [69] in elettromagnetismo non lineare, con effetti di memoria. Qui studia le equazioni

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \qquad \mathrm{curl}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{31}$$

dove **B** è l'induzione magnetica e **D** è lo spostamento elettrico. Le equazioni costitutive sono

$$\mathbf{D}(\mathbf{x},t) = \mathbf{D}(\mathbf{E}(\mathbf{x},t), \mathbf{E}^t(\mathbf{x},s)), \tag{32}$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{x},t) = \mu\mathbf{H}(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \gamma\mathbf{E}(\mathbf{x},t). \tag{33}$$

Sotto varie ipotesi Graffi [69] stabilisce l'unicità di una soluzione del sistema (31)–(33), considerando in (32) una dipendenza generale dalla storia.

Un altro pezzo particolarmente interessante delle sue ricerche è Graffi [70], nel quale discute un modello di grande successo per l'ottica non lineare, che era stato proposto dal fisico Nicolaas Bloembergen, premio Nobel 1981. Il modello è di nuovo basato sulle equazioni di Maxwell e quelle studiate in Graffi [70] sono

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}, \qquad \mathrm{curl}\,\mathbf{E} = -\mu\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{34}$$

insieme con le equazioni costitutive

$$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E}, \qquad \mathbf{D} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{35}$$

dove γ è la conduttività, ϵ_0 è la costante dielettrica nel vuoto, e $\mathbf{P}$ è il vettore polarizzazione. La polarizzazione soddisfa una legge di evoluzione non lineare della forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \mathbf{F}\Big(\mathbf{P}, \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}\Big) = \mathbf{E}, \tag{36}$$

dove $\mathbf{F}$ è una funzione vettoriale dei suoi argomenti. Graffi [70] osserva che Bloembergen propone che $\mathbf{F}$ sia composta da tre termini: i primi due sono lineari in $\mathbf{P}$ e in $\partial \mathbf{P}/\partial t$, mentre il terzo è quadratico in $\mathbf{P}$. Comunque Graffi permette che $\mathbf{F}$ abbia una forma generale soggetta ad essere lipschitziana nei suoi argomenti.

Le equazioni (34)–(36) sono definite su un dominio tridimensionale Ω e $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{P}$, $\partial \mathbf{P}/\partial t$ sono assegnate al tempo $t = 0$ per ogni $\mathbf{x} \in \Omega$. Sulla frontiera di Ω, denotata da Σ, la componente tangenziale di $\mathbf{E}$ o di $\mathbf{H}$ è assegnata per ogni $t \in (0, T),\ T < \infty$. Il problema ai valori iniziali e alla frontiera così definito è denotato con $\mathcal{M}$. Graffi stabilisce l'unicità per una soluzione di $\mathcal{M}$ sotto la relativamente debole condizione di Lipschitz su $\mathbf{F}$.

Bassanini [5, 6] evidenzia che Franken e Ward [42] hanno rilevato luce ultravioletta con frequenza doppia di un raggio laser, quando questo raggio passa attraverso un cristallo di quarzo. Essi indicano anche che Graffi [67] ha fornito una spiegazione soddisfacente di questi esperimenti. Bassanini [5, 6] sottolinea che questo conduce al "Problema di Graffi", che coinvolge la generazione della seconda armonica di un'onda laser (a rubino) attraverso una lamina rettangolare di cristallo di quarzo. Questo problema è stato poi studiato intensivamente da Cesari dal punto di vista dell'Analisi, v. p. es. Cesari [16].

8. Effetti ereditari – Viscoelasticità I

Oltre ad essersi dedicato, per la maggior parte della sua vita scientifica all'elettro-magnetismo, con una speciale passione verso i fenomeni ereditari, un'altra area in cui i contributi di Graffi hanno avuto un'importanza imprescindibile è quella della viscoelasticità lineare, nel contesto della termodinamica dei materiali con memoria.

I suoi articoli in questo campo, dopo le teorie di Boltzmann e di Volterra, si possono ritenere pionieristici, nel senso che diventano subito una fondamentale fonte di ispirazione per le ricerche dell'epoca e, dopo più di trent'anni, continuano ad esercitare una forte influenza su quelle attuali.

I suoi due primi lavori sono del 1974, mentre l'ultimo, riguardante l'opera di Volterra sui fenomeni ereditari, Graffi lo presenta al Convegno Internazionale che si tenne ai Lincei ai primi di ottobre del 1990, in memoria dell'illustre scienziato, nel cinquantenario dalla sua morte.

Oltre alla esposizione, con commenti calzanti e autorevoli rivisitazioni, dei principali risultati di Volterra, Graffi ci presenta il suo punto di vista anche su quella parte della sua vita scientifica dedicata proprio ai fenomeni ereditari che, a suo dire, ne era stata una diretta conseguenza. Qui Graffi, oltre all'eredità scientifica di Volterra, ci consegna la sua stessa eredità scientifica, a pochi mesi dalla sua scomparsa. Fra l'altro, riferendomi al lavoro di rassegna Graffi [73], oltre alla ricca bibliografia su Volterra, ritroviamo le citazioni degli studi fondamentali di Graffi, aggiornati al 1989, e le referenze essenziali per la termodinamica dei materiali con memoria.

Nel lavoro, dove è palpabile la grande ammirazione per l'illustre scienziato, troviamo definizioni aggiornate, dimostrazioni modificate per tener conto delle più recenti tecniche matematiche, e spesso ottenute in modo autonomo, oltre a "spunti" del tutto originali.

Con molta ragione, la comunità scientifica internazionale ritiene Graffi il principale successore del lavoro di Volterra nello studio dei materiali con memoria.

In particolare, a Graffi si deve il merito di aver intuito che i risultati di Volterra sull'energetica dei fenomeni ereditari, in ambito meccanico, con una re-interpretazione opportuna, rimangono validi anche in chiave termodinamica.

Visto che la termodinamica viene estesa ai materiali con memoria nel 1964, con la memoria fondamentale di Coleman [23], di fatto Graffi riconosce a Volterra il ruolo di precursore della termodinamica dei fenomeni ereditari. Seguendo il punto di vista di Graffi su Volterra, uniformando le notazioni a quelle in uso corrente, vogliamo commentare il ruolo scientifico primario di Graffi in questo campo.

Nell'approccio Lagrangiano e omettendo la dipendenza dalla coordinata spaziale fissa **X**, la forma standard dell'equazione costitutiva per la viscoelasticità lineare, in versione 3D, si scrive

$$T(t) = G(0)\,E(t) + \int_0^\infty G'(s)\,E^t(s)\,ds \tag{37}$$

dove $T(t)$ è il tensore degli sforzi di Cauchy, $E(t) = (\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)/2$, rappresenta il tensore di deformazione infinitesima, $G(0)$ e $G'(s)$ sono tensori del quarto ordine simmetrici, dipendenti dal materiale, con il ruolo di modulo elastico istantaneo e di funzione di memoria o di rilassamento rispettivamente.

Come nella sezione 4, indichiamo con $E^t(s) = E(t-s)$, $s \geq 0$ la storia passata del tensore di deformazione.

Nello scrivere la (37), Graffi tiene conto del principio dell'invariabilità dell'azione ereditaria per il tensore di memoria, introdotto da Volterra: così l'integrale di memoria $\int_{-\infty}^t G'(t,\tau)\,E(\tau)\,d\tau$, sotto la condizione $G'(t,\tau) = G'(t-\tau)$, con il cambio di variabile $s = t - \tau$ assume la forma dell'integrale in (37).

Supponiamo $G(0)$ definito positivo e in base al Principio della "Fading Memory" (in breve PFM), prendiamo $G'(s) \in L^1(0,\infty)$, nullo per $s = \infty$, e assumiamo l'esistenza di una funzione di influenza $h(s) > 0$ tale che $\lim_{s\to\infty} s^r h(s) = 0$ per qualche $r > 0$ e $\int_0^\infty \|G'(s)\|^2\,h(s)^{-2}\,ds < +\infty$. Graffi in due articoli del 1974 citati in Graffi [73] suppone che le componenti $G'_{ijhk}(s)$, insieme alle loro derivate, per $s \to \infty$ siano $\mathrm{O}(s^{-(1+r)})$ per qualche $r > 0$.

Usando la formula

$$G(\infty) = \int_0^\infty G'(s)\, ds + G(0) \tag{38}$$

nella (37) si ottiene

$$T(t) = G(\infty)E(t) + \int_0^\infty G'(s)\, E_r^t(s)\, ds, \tag{39}$$

che introduce la deformazione relativa $E_r^t(s) = E^t(s) - E(t)$, legata alla definizione di spostamento di Dafermos [25], $\eta(t,s) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^t(s)$.

La notazione $G(\infty)$ indica il modulo elastico in equilibrio, definito positivo, con $G(0) - G(\infty)$ definito positivo.

L'idea cruciale di Graffi nel 1974, fu quella di dimostrare la consistenza termodinamica della (39), nell'ambito della Termodinamica dei materiali con memoria, proponendo come energia libera ψ, per unità di volume, l'energia potenziale interna evidenziata da Volterra nella formula per la potenza meccanica interna $\mathscr{P}_m(t) = T(t) \cdot \dot{E}(t)$ sperimentalmente non negativa.

La formula di Volterra si legge

$$T(t) \cdot \dot{E}(t) = \frac{d}{dt}\psi(t) + E_d, \tag{40}$$

dove $E_d = \int_0^\infty G''(s) E_r^t(s) \cdot E_r^t(s)\, ds$, rappresenta l'energia dissipata (non negativa) e

$$\psi = \frac{1}{2}\Big(G(\infty)E(t) \cdot E(t) - \int_0^\infty G'(s) E_r^t(s) \cdot E_r^t(s)\, ds\Big) \tag{41}$$

rappresenta l'energia libera di Graffi, indicata poi con ψ_G e conosciuta nella letteratura scientifica internazionale come l'energia libera di Graffi-Volterra.

Per ottenere questo risultato, si usa un'identità di Volterra, riportata da Graffi in Graffi [73] pag. 68 (1.3), che nelle nostre notazioni si legge

$$E_r^t(s) \cdot \frac{d}{dt} E^t(s) = -E_r^t(s) \cdot \frac{d}{ds} E_r^t(s) = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(E_r^t(s) \cdot E_r^t(s)).$$

Poi si procede ad una integrazione per parti, tenendo conto che $G'(\infty) = 0$ e che $E_r^t(s)$ risulta nulla per $s = 0$. La non negatività di E_d porta alla non negatività del tensore $G''(s)$ che, a sua volta, porta alla monotona crescita di G', nullo per $s = \infty$; il tensore di memoria $G'(s)$ risulta dunque un tensore simmetrico definito negativo, e trova conferma la condizione $G(0) - G(\infty)$ definito positivo, dato che il tensore $G(s)$ è definito positivo ma decrescente in s.

Quindi, sotto queste restrizioni, la teoria costitutiva per la viscoelasticità lineare risulta compatibile con la termodinamica.

L'espressione (41) per ψ_G, risulta > 0, presenta una dipendenza quadratica da $E(t)$ e dal funzionale storia relativa $E_r^t(s)$, e soddisfa le tre condizioni imposte dalla termodinamica per la caratterizzazione dell'energia libera, cioè

(I) $T(t) = \partial\psi(t)/\partial E(t)$,

(II) fra tutte le storie $E^t(s)$ che per $s = 0$ sono costanti, $E(t) = E_c$, la ψ_G risulta minima in corrispondenza di $E^t(s) = E_c$, per ogni $s > 0$, cioè $\psi(E^t)^3\psi(E_c^t)$,

(III) vale la disuguaglianza di Clausius-Duhem per processi isotermici,

$$d\psi/dt^2 T(t) \cdot \dot{E}(t).$$

La (III) ci restituisce l'intuizione cruciale di Graffi che aveva saputo cogliere gli aspetti termodinamici nelle considerazioni a carattere puramente meccanico di Volterra.

9. Effetti ereditari – Viscoelasticità II

Nel caso 3D, in due citatissimi lavori del 1974, Graffi affronta il modello più semplice dei corpi isotropi e omogenei per cui, mantenendo le notazioni precedenti, i moduli elastici e i coefficienti di memoria/di rilassamento sono definiti, per ogni i, j, h, k da 1 a 4

$$G(\infty)_{ijhk} = \lambda(\infty)\delta_{ij}\delta_{hk} + 2\mu(\infty)\delta_{ih}\delta_{jk} \tag{42}$$

$$G'(s) = \lambda'(s)\delta_{ij}\delta_{hk} + 2\mu'(s)\delta_{ih}\delta_{jk}, \tag{43}$$

dove $\lambda(\infty)$ e $\mu(\infty)$ sono costanti > 0, identificabili con le costanti elastiche di Lamé mentre $\lambda'(s)$ e $\mu'(s)$ rappresentano i coefficienti viscoelastici di Lamé, nulla all'inftinito.

Seguendo gli argomenti classici della Termodinamica, come l'applicazione del Lemma di Coleman e la decomposizione dei tensori di deformazione istantanea e relativa $E(t)$ ed $E_r^t(s)$ nelle loro parti deviatoriche E^D, $E_r^t(s)^D$ e sferiche tr$E(t) = \nabla \cdot u$, tr$E_r^t(s) = \nabla \cdot u_r^t(s)$, dalla compatibilità con la seconda Legge della Termodinamica, sempre per processi isotermici, ottiene le seguenti restrizioni termodinamiche alle scelte delle funzioni di memoria

$$3\lambda''(s) + 2\mu''(s) \geq 0, \ \mu''(s) \geq 0. \tag{44}$$

Dunque $3\lambda'(s) + 2\mu'(s)$ e $\mu'(s)$ sono funzioni non decrescenti, nulle per $s \to \infty$, per cui

$$3\mu'(s) + 2\mu'(s) \leq 0, \ \mu'(s) \leq 0. \tag{45}$$

Graffi nota che tali restrizioni, legittimate dalla termodinamica, in un altro contesto, per la dimostrazione di un teorema di unicità le aveva ammesse come intuitive, dal punto di vista sperimentale. Nel caso in cui tr$E = 0$, ovvero per spostamenti solenoidali, l'espressione dell'energia libera di Graffi si riduce alla forma

$$\psi_G = \mu(\infty)E(t) \cdot E(t) - \int_0^\infty \mu'(s)E_r^t(s) \cdot E_r^t(s)ds. \tag{46}$$

Osserviamo che un liquido viscoelastico isotropo e omogeneo è governato dall'equazione costitutiva

$$T = -pI + \int_0^\infty 2\mu(s) D^t(s)\, ds, \tag{47}$$

dove p rappresenta la pressione, $\mu(s)$ è il coefficiente viscoelastico di memoria che prendiamo in $L^1(0,\infty)$, sapendo che $\mu(\infty) = 0$, $D(t)$ è il tensore di deformazione che, per piccoli spostamenti, vale proprio $\dot{E}(t)$.

L'equazione costitutiva, seguendo la teoria di Graffi-Volterra, si riscrive

$$\begin{aligned} T(t) = &- pI + 2\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{dt} E^t(s)\, ds \\ &= -pI - 2\int_0^\infty \mu(s) \frac{d}{ds} E_r^t(s)\, ds = -pI + 2\int_0^\infty \mu'(s) E_r^t(s)\, ds, \end{aligned} \tag{48}$$

dopo un'integrazione per parti e tenendo conto del fatto $\mu'(\infty) = 0$ e che $E_r^t(s) = 0$ per $s = 0$.

L'energia libera di Graffi è

$$\psi_G = -\int_0^\infty \mu'(s) E_r^t(s) \cdot E_r^t(s)\, ds, \tag{49}$$

e per soddisfare le tre condizioni imposte sopra, per il coefficiente di memoria si deve richiedere $\mu'(s) < 0$ e $\mu''(s) \geq 0$ per ogni $s > 0$. La prima richiesta serve per la positività mentre con la seconda ci assicuriamo l'azione non negativa dell'energia dissipata.

Questa teoria costitutiva con memoria viene poi generalizzata in Amendola *et al.* [1] al caso di liquidi viscoelastici isotropi e omogenei, non semplici, del tipo gradiente del secondo ordine, per cui il tensore degli sforzi "efficace" ha la forma

$$T(t) = -pI + \int_0^\infty 2\mu'(s) E_r^t(s)\, ds - \int_0^\infty \kappa'(s)\, \nabla \cdot \nabla E_r^t(s)\, ds, \tag{50}$$

dove $\kappa'(s)$ denota l' ulteriore coefficiente iperviscoelastico di memoria.

Per la consistenza termodinamica della nuova scelta costitutiva, al posto di (49), si propone

$$\psi_G = -\int_0^\infty \mu'(s) E_r^t(s) \cdot E_r^t(s) ds - \frac{1}{2}\int_0^\infty \kappa'(s) \nabla E_r^t(s) \cdot \nabla E_r^t(s)\, ds, \tag{51}$$

sotto le condizioni aggiuntive $\kappa'(s) < 0$ e $\kappa''(s) \geq 0$ per gli stessi motivi del modello semplice.

Consideriamo ora il caso 1D e, omettendo la dipendenza dalla coordinata spaziale X, partiamo dalla seguente relazione costitutiva fra lo sforzo $\sigma(t)$ e la deformazione $e(t)$

$$\sigma(t) = g(\infty)\, e(t) + \int_0^\infty g'(s)\, e_r^t(s)\, ds \tag{52}$$

con il modulo elastico all'equilibrio $g(\infty) > 0$, $e(t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}$ e la storia relativa $e_r^t(s) = e^t(s) - e(t)$ per ogni $s > 0$.

Dalle precedenti considerazioni termodinamiche, sappiamo che $g'(s) < 0$ con la condizione $g'(\infty) = 0$, e con $g(0) - g(\infty) > 0$.

Ritengo di interesse, anche per gli sviluppi successivi, riportare i passi chiave della dimostrazione originale di Graffi, in Graffi [73], riguardante la determinazione del segno di $g'(s)$.

Il cuore dell'idea è considerare la deformazione di tipo sinusoidale, cioè $e(t) = A\sin(\omega t)$ per ogni t da $-\infty$ a 0, con l'ampiezza A e la pulsazione ω costanti positive.

In questo modo il lavoro dell'azione su un periodo $p = 2\pi/\omega$ vale

$$L = \int_0^p \sigma(t)\,\dot{e}(t)\,dt = A\,\omega \int_0^p \sigma(t)\,\cos(\omega t)\,dt,$$

dove $\sigma(t)$ soddisfa la (52).

Con semplice trigonometria si trova per il lavoro l'espressione

$$L = -\frac{1}{2}\,A^2\omega\,p \int_0^p g'(s)\,\sin(\omega s)\,ds \tag{53}$$

conforme alla (6.4) di Graffi [73], ma con le nostre notazioni.

Usando le parole di Graffi, L rappresenta l'energia dissipata che, sperimentalmente, risulta non negativa.

Dunque, restringendoci a storie periodiche, ogni funzione di rilassamento $g'(s)$, o meglio ogni nucleo di memoria, deve soddisfare la disuguaglianza, nota come Proprietè di Clausius

$$g'(\omega) = \int_0^p g'(s)\,\sin(\omega s)\,ds^{2}0 \quad \forall\,\omega > 0. \tag{54}$$

Da questa importante disuguaglianza, nota in letteratura, come la disuguaglianza di Graffi, derivata in Graffi [48], nell'ambito dell'aspetto ereditario dei fenomeni elettromagnetici, con considerazioni, giustificate fisicamente, e molto brillanti nella loro semplicità matematica, si conclude che la funzione di rilassamento $g'(s)$ deve essere negativa, cioè che l'ereditarietà viscoelastica è ritardatrice.

Il fatto sorprendente è che questo articolo "geniale", citatissimo a tutt'oggi, Graffi lo pubblica nel 1928, a soli 23 anni! La restrizione (54), oltre a garantire l'invertibilità della (52), risulta strategica per l'asintotica stabilità del problema dinamico e anche per il problema quasi-statico, come dimostra Fichera [37] nel 1988.

Di rilievo poi che, per "testare" la compatibiltà con la termodinamica delle funzioni di rilassamento, basta esaminare ciò che succede per storie sinusoidali.

Lavorando su cicli chiusi, la disuguaglianza di Graffi identifica la proprietà di Clausius, come condizione necessaria e sufficiente per la validità della Seconda Legge della Termodinamica, nella forma di Clausius-Duhem.

Tuttora la (54) è strategica per tutte le ricerche sulle restrizioni imposte dalla termodinamica alla forma dei funzionali costitutivi dei materiali con memoria, sia semplici che non.

Un'ulteriore importante condizione su $g'(s)$, legittimata fisicamente, partendo dalla forma 1D della (37) e ponendo $g'(0) = a > 0$, si legge

$$\int_0^\infty |g'(s)|\, ds < a,$$

che Graffi ottiene nel suo fondamentale articolo Graffi [71], mostrando così il legame fra i moduli elastici, istantaneo e d'equilibrio, $g(0) - g(\infty) > 0$, con $g(\infty) > 0$.

Le tre condizioni termodinamiche non sono tuttavia sufficienti ad assicurare una sola espressione dell'energia libera, così Graffi, in due essenziali studi del 1982 e 1986 ci fornisce un procedimento per la costruzione di una energia libera alternativa, con la finalità di confrontare la sua espressione ψ_G con quelle proposte da Day [26] e da Coleman e Mizel, vedi Graffi [73].

Riprendiamo ora il vettore spostamento $\eta(t, s)$ di Dafermos e introduciamo la nuova notazione

$$\mathscr{E}(t, s) = \nabla\eta(t, s) = E(t) - E(t - s) = -E_r^t(s)$$

che nella forma 1D diventa

$$\varepsilon(t, s) = \frac{\partial \eta}{\partial x} = e_r^t(s).$$

Mettendoci nel caso 1D, in base alla relazione costitutiva (52), e tenendo conto della definizione di $\varepsilon(t, s)$, l'energia libera di Graffi assume la forma

$$\psi_G(t) = \frac{1}{2}\Big(g(\infty)\, e(t)^2 - \int_0^\infty g'(s)\, \varepsilon(t, s)^2\, ds\Big). \tag{55}$$

Come osservato prima, le condizioni necessarie e sufficienti per la consistenza termodinamica di ψ_G sono $g'(s) < 0$ e $g''(s) \geq 0$. Modificando nell'espressione dell'energia libera il termine dipendente solo dalla storia $e^t(s)$, in modo però che siano rispettate le prime due condizioni (I) e (II), tenendo conto della (38) Graffi propone la nuova espressione

$$\begin{aligned}\psi_D(t) =& \frac{1}{2} g(\infty)\, e(t)^2 - \frac{1}{2}[g(\infty) - g(0)]\Big[e(t) - \frac{1}{g(\infty) - g(0)} \int_0^\infty g'(s) e^t(s)\, ds\Big]^2 \\ =& \frac{1}{2} g(0) e(t)^2 + e(t) \int_0^\infty g'(s)\, e^t(s)\, ds - \frac{1}{2}\frac{1}{g(\infty) - g(0)}\Big(\int_0^\infty g'(s) e^t(s)\, ds\Big)^2\end{aligned}$$

che nella versione tensoriale diventa

$$\begin{aligned}\psi_D(t) =& \frac{1}{2}\, G(0) E(t) \cdot E(t) + E(t) \cdot \int_0^\infty G'(s) E^t(s)\, ds \\ & - \frac{1}{2}(G(\infty) - G(0))^{-1} \int_0^\infty G'(s)\, E^t(s)\, ds \cdot \int_0^\infty G'(s)\, E^t(s)\, ds.\end{aligned} \tag{56}$$

Si nota subito che in ψ_D non compare il tensore di deformazione relativo $E_r^t(s)$.

Applicando la formula (4) di Volterra, Graffi (1982) dimostra che la condizione necessaria per la non negatività di E_d, cioè perché sia soddisfatta anche la (III), risulta

$$\frac{g'(s)\,g''(s)}{g(0)-g(\infty)} \leq 0 \tag{57}$$

sempre garantita sotto le nostre condizioni.

Con un esempio, però Graffi mette in evidenza che la (57) non è in generale sufficiente per la validità della condizione

$$-E_d = \frac{1}{g(0)-g(\infty)} \int_0^\infty g'(s)\,\varepsilon(t,s)\,ds \int_0^\infty g''(s)\,\varepsilon(t,s)\,ds^2 0, \tag{58}$$

concludendo che non si può affermare che l'espressione (56) rappresenti, in ogni caso, l'energia libera alternativa cercata. Naturalmente la condizione (57) diventa necessaria e sufficiente per la (58), considerando funzioni di rilassamento esponenziali, del tipo $g'(s) = -k\exp(-s/\lambda)$, k e $\lambda > 0$, somme di esponenziali di questo tipo, o sotto opportune condizioni di convergenza, serie di esponenziali, ritrovando così le espressioni di Day e di Coleman-Mizel.

Inoltre, dal confronto fra ψ_G e ψ_D, applicando la disuguaglianza di Schwarz, segue

$$\psi_D \leq \psi_G \tag{59}$$

che, a sua volta, permette di individuare un valore maggiorante per il massimo lavoro ricuperabile.

Nel caso 3D Graffi nel 1986 dimostra che condizione necessaria affinché ψ_D, definita nella (56), soddisfi anche la condizione (III), cioè $-E_d \leq 0$, è che

$$(G(0)-G(\infty))^{-1} \int_0^\infty G'(s)\,\mathscr{E}(t,s)\,ds \cdot \int_0^\infty G''(s)\,\mathscr{E}(t,s)\,ds^2 0. \tag{60}$$

Escludendo il caso della storia costante, pur essendo i tensori simmetrici $G'(s)$ e $G''(s)$ definiti di segno opposto, per gli stessi motivi di prima, non si può affermare in generale, la validità della (60). Il discorso risulta diverso per nuclei di memoria esponenziali, come $G'(s) = -G'(0)\exp(-s/\lambda)$, $G'(0)$ tensore costante definito positivo e λ costante positiva.

10. Effetti ereditari - Commenti conclusivi

Morro e Vianello [91], studiano teorie costitutive per la viscoelasticità lineare, nell'ambito della termodinamica delle variabili interne. Seguendo Graffi, trovano un'espressione dell'energia libera del problema del tipo ψ_D e ne dimostrano l'unicità.

Risulta evidente che tutte le teorie costitutive, di tipo “rate”, in avanti o all’indietro nel tempo, danno luogo, con passaggi formali, ad equazioni integro-differenziali, con nuclei di memoria esponenziali, che rispettano l’invariabilità dell’ azione ereditaria; vedi per esempio l’equazione di Cattaneo (13) della sezione 4.

Graffi, in collaborazione con Fabrizio [76], [77], per materiali viscoelastici lineari di tipo “rate”, in cui la funzione di rilassamento $G'(s)$ è una combinazione lineare di n esponenziali, del tipo serie di Prony, affronta anche la questione essenziale dello stato del sistema all’istante t, dimostrando che dipende solo dalla $(n+1)$-pla $(E(t), E_{\alpha_1}(t), \ldots, E_{\alpha_n}(t))$, dove $E_{\alpha_k}(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp(-\alpha_k(t-\tau))\, E(\tau)\, d\tau$, per coefficienti $\alpha_k > 0$ e diversi fra loro. Con un controesempio dimostrano che anche in questo caso l’energia libera trovata non è unica.

Graffi amava ripetere che ogni teoria scientifica, senza nulla togliere al merito di chi l’ha ideata, viene presto o tardi superata da nuove scoperte e inquadrata in teorie più ampie.

Aggiungiamo a questa realistica consapevolezza, che però non ci sarebbero nuove ricerche, senza le cruciali intuizioni di chi le ha originate la prima volta.

La viscoelasticità lineare e non lineare, anche con nuclei di memoria illimitati. vedi p.es. Fabrizio e Morro [34], ha sempre attirato l’attenzione di autorevoli studiosi con risultati molto interessanti. Leggendo questi lavori, però l’eredità scientifica di Graffi risulta palpabile, anche nel modo in cui vengono presentati gli argomenti. Per esempio fra i lavori più recenti si vedano Fabrizio *et al.* [35], Morro [90] e Golden [45], con relative bibliografie.

Di recente, gli effetti di memoria per una vasta tipologia di fenomeni della vita reale e delle scienze sociali, vengono descritti con l’uso dell’operatore frazionario di Caputo, con nucleo di memoria singolare o, con l’operatore di Caputo e Fabrizio [11] che, presentando un nucleo esponenziale sembra più adatto non solo nelle varie applicazioni, ma anche per un confronto costruttivo con le teorie di Graffi-Volterra per i fenomeni ereditari.

Apparentemente i due approcci sono similari, ma Fabrizio [33], mostra che le coincidenze riguardano più i fluidi viscoelastici che i solidi, proprio a causa del nucleo singolare che non sta in L^1; ma le conclusioni forse potrebbero cambiare con la derivata frazionaria di Caputo-Fabrizio!

Morro [90], nel caso del nucleo illimitato, nello spirito di Graffi, affronta il problema della compatibilità con la termodinamica della teoria costitutiva viscoelastica frazionaria, e conclude che risulta un interessante problema aperto trovare un’espressione per l’energia libera.

Bologna, grazie alla figura carismatica di Graffi, bolognese di adozione se non di nascita, come amava definirsi, non solo per i fondamentali risultati delle sue ricerche e per la sua generosità scientifica, ma anche per i rapporti umani che sapeva creare, durevoli nel tempo, era sempre al centro dell’attenzione di tutti i dibattici scientifici della Fisica Matematica. Si può dire che le personalità internazionali più autorevoli, come Coleman, Serrin, Truesdell, solo per fare alcuni nomi, fossero proprio “di casa”!

Vale la pena di segnalare che negli anni ottanta, nell'ambito della viscoelasticità lineare, il PFM viene sottoposto a critiche di diversa natura. Nello specifico, si apre un garbato e conturbante dibattito sul ruolo del PFM nella scelta di possibili funzioni di rilassamento, compatibili con la termodinamica, ma anche ovviamente adatte ad assicurare al problema integro-differenziale, nel quale il problema fisico si traduce, un teorema di esistenza e anche un teorema di unicità

Fichera [38], da analista puro, solleva la questione delle difficoltà matematiche nell'avere una memoria molto tenace, evidenziando nel contempo i rapporti difficili, dal punto di vista scientifico, con i fisici matematici, preoccupati che i fondamenti fisici venissero comunque rispettati.

Graffi partecipa alla questione con un ruolo di primo piano, dando l'essenziale contributo scientifico Graffi [71], che dedica proprio all'amico Fichera per i suoi sessanta anni, e per dirimere, una volta e per tutte, le polemiche, organizza all'Accademia dei Lincei nel maggio del 1986 una tavola rotonda sul tema "Continui con Memoria", invitando tutti gli autorevoli protagonisti alla resa dei conti finale.

Secondo Graffi, il vero scienziato deve avere una buona preparazione culturale, sicuro razioncinio, tenacia nelle ricerca senza scoraggiarsi per eventuali insuccessi, ed altre qualità come la curiosità, ma solo con la fantasia può raggiungere quelle scoperte che imprimono alla Scienza una svolta decisiva.

Graffi è stato un vero, grande, scienziato!

Bibliografia

[1] G. Amendola, M. Fabrizio, and J. M. Golden. Second gradient viscoelastic fluids: dissipation principle and free energies. *Meccanica*, 47:1859–1868, 2012.

[2] A. Amiri Hezaveh, P. Karimi, and M. Ostoja Starzewski. Stress field formulation of linear electro - magneto - elastic materials. *Math. Mech. Solids*, 24:3806–3822, 2019.

[3] H. Antes e O. von Estorff. Ausbreitung transienter akusticher Wellen - Untersuchungen mit einer Zeitschritt - Randelementmethode. *Ingeneur Archiv*, 59:17–31, 1989.

[4] B. Arntsen e J. M. Carcione. A new insight into the reciprocity principle. *Geophysics*, 65:1604–1612, 2000.

[5] P. Bassanini. A nonlinear hyperbolic problem arising from a question of nonlinear optics. Part I. *ZAMP*, 27:409–422, 1976.

[6] P. Bassanini. A nonlinear hyperbolic problem arising from a question of nonlinear optics. Part II. *ZAMP*, 27:815–831, 1976.

[7] C. E. Beevers. Continuous data dependent results for a general theory of heat conduction in bounded and unbounded domains. *Quart. Appl. Math.*, 35:111–119, 1977.

[8] H. Beirao da Veiga. Diffusion on viscous fluids. Existence and asymptotic properties of solutions. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 10:341–351, 1983.

[9] A. Borelli e M. C. Patria. Uniqueness and reciprocity in the boundary initial value problem for a mixture of two elastic solids occupying an unbounded domain. *Acta Mechanica*, 46:99–109, 1983.

[10] J. R. Cannon e G. H. Knightly. Some continuous dependence theorems for viscous fluid motions. *SIAM J. Appl. Math.*, 18:627–640, 1970.

[11] M. Caputo e M. Fabrizio. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Prog. Fract. Diff. Appl.*, 1:73–85, 2015.

[12] B. Carbonaro e R. Russo. On Graffi's reciprocal theorem in unbounded domains. *J. Elasticity*, 15:35–42, 1985.

[13] S. Carillo e P. M. Jordan. On the propagation of temperature - rate waves and travelling waves in rigid conductors of the Graffi - Franchi - Straughan type. *Math. Comp. Simulation*, 176:120–133, 2020.

[14] M. Carr, S. E. King, and D. G. Dritschel. Numerical solution of shear - induced instabilities in internal solitary waves. *J. Fluid Mech.*, 683:263–288, 2011.

[15] C. Cattaneo. Sulla conduzione del calore. *Atti Sem. Mat. Fis. Modena*, 3:83–101, 1948.

[16] L. Cesari. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic systems in the Schauder canonic form. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 4:3–4, 1974.

[17] L. Cesari e R. Kannan. Solutions in the large of Liénard systems with forcing terms. *Annali Matem. Pura Appl.*, 111:101–124, 1976.

[18] S. Chirita e M. Ciarletta. Reciprocal and variational principles in linear thermoelasticity without energy dissipation. *Mech. Res. Commun.*, 37:271–275, 2010.

[19] C. I. Christov. On frame indifferent formulation of the Maxwell - Cattaneo model of finite - speed heat conduction. *Mech. Res. Commun.*, 36:481–486, 2009.

[20] M. Ciarletta. General theorems and fundamental solutions in the dynamical theory of mixtures. *J. Elasticity*, 39:229–246, 1995.

[21] M. Ciarletta e B. Straughan. Uniqueness and structural stability for the Cattaneo-Christov equations. *Mech. Res. Commun.*, 37:445–447, 2010.

[22] M. Ciarletta, M. Nunziata, F. Passarella, and V. Tibullo. Some results on thermopiezoelectricity of nonsimple materials. *Mech. Res. Commun.*, 125:103969, 2022.

[23] B. D. Coleman. Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 17:1–45, 1964.

[24] B. D. Coleman, M. Fabrizio, and D. R. Owen. On the thermodynamics of second sound in dielectric crystals. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 80:135–158, 1982.

[25] C. M. Dafermos. Asymptotic stability in viscoelasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 37:297–308, 1970.

[26] W. A. Day. *The thermodynamics of simple materials with fading memory*. Springer, New York, 1972.

[27] A. T. De Hoop e H. J. Stam. Time domain reciprocity theorems for elastodynamic wave fields in solids with relaxation and their application to inverse problems. *Wave Motion*, 10:479–489, 1988.

[28] A. Douglas, J. A. Hudson, and Kembhavi. V. K. The analysis of surface wave spectra using a reciprocity theorem for surface waves. *Geophys. J. Int.*, 23:207–223, 1971.

[29] R. H. Dyer e D. E. Edmunds. A uniqueness theorem in magnetohydrodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 8:254–262, 1961.

[30] D. E. Edmunds. On the uniqueness of viscous flows. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 14:171–176, 1963.

[31] D. E. Edmunds. Asymototic behaviour of solutions of the Navier - Stokes equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 22:15–21, 1966.

[32] M. Fabrizio. Dario Graffi in a complex historical period. In *Mathematicians in Bologna 1861 – 1960*. Birkhauser, Basel, 2011.

[33] M. Fabrizio. Fractional rheological models for thermomechanical systems. dissipation and free energies. *Fractional Calculus Appl. Analysis*, 17:206–223, 2014.

[34] M. Fabrizio e A. Morro. *Mathematical problems in linear viscoelasticity*. SIAM, Philadelphia, PA, 1992.

[35] M. Fabrizio, C. Giorgi, and V. Pata. A new approach to equations with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 198:189–232, 2010.

[36] I. Ferrari. Su un teorema di unicità per le equazioni dell'idromagnetismo. *Atti del Sem. Matem. Fis. Univ. Modena*, 9:205–217, 1960.

[37] G. Fichera. Sui materiali elastici con memoria. *Atti Acc. Lincei Rend. Fis.*, 82: 473–478, 1988.

[38] G. Fichera. I difficili rapporti fra l'analisi funzionale e la fisica matematica. *Atti Acc. Lincei Rend. Mat.*, 91:161–170, 1990.

[39] F. Franchi. Wave propagation in heat conducting dielectric solids with thermal relaxation and temperature dependent electric permittivity. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 11:443–461, 1985.

[40] F. Franchi e B. Straughan. Continuous dependence on the relaxation time and modelling, and unbounded growth, in theories of heat conduction with finite propagation speeds. *J. Math. Anal. Appl.*, 185:726–746, 1994.

[41] F. Franchi e B. Straughan. A comparison of the Graffi and Kazikhov - Smagulov models for top heavy pollution instability. *Advances in Water Resources*, 24:585–594, 2001.

[42] P. A. Franken e J. F. Ward. Optical harmonics and nonlinear phenomena. *Rev. Mod. Physics*, 35:23–39, 1963.

[43] G. P. Galdi e P. Maremonti. A uniqueness theorem for viscous fluid motions in exterior domains. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 91:375–384, 1986.

[44] G. P. Galdi e B. Straughan. Stability of solutions of the Navier - Stokes equations backward in time. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 91:107–114, 1986.

[45] J. M. Golden. Free energies for nonlinear materials with memory. *J. Elasticity*, 148: 141–165, 2022.

[46] T. Goudon e A. Vasseur. On a model for mixture flows: derivation, dissipation and stability properties. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 220:1–35, 2016.

[47] D. Graffi. Sulla induzione magnetica. *Rend. Accad. Naz. Lincei, Rend. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 6:595–601, 1927.

[48] D. Graffi. Sui problemi della ereditarietà lineare. *Nuovo Cimento*, 5:53–71, 1928.

[49] D. Graffi. Sul teorema di reciprocità della radiotelegrafia. *Boll. Unione Matem. Ital.*, 8:187–193, 1929.

[50] D. Graffi. Alcune applicazioni del teorema di reciprocità della radiotelegrafia. *Il Nuovo Cimento*, 9:251–258, 1932.

[51] D. Graffi. Sopra alcuni fenomeni ereditari dell'elettrologia. *Rend. Ist. Lomb. Sc. Lett.*, 19:151–166, 1936.

[52] D. Graffi. Una teoria ereditaria dell'effetto Lussemburgo. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 14:36–64, 1936.

[53] D. Graffi. Sui teorema di reciprocità nei fenomeni dipendenti del tempo. *Annali Matem. Pura Appl.*, 18:173–200, 1939.

[54] D. Graffi. Sui teorema di reciprocità per le correnti elettriche variabili. *Annali Matem. Pura Appl.*, 25:267–276, 1946.

[55] D. Graffi. Sui teorema di reciprocità nella dinamica dei corpi elastici. *Mem. Accad. Sci. Bologna*, 18:103–109, 1947.

[56] D. Graffi. Forced oscillations for several nonlinear circuits. *Annals of Mathematics*, 54:262–271, 1951.

[57] D. Graffi. Il teorema di unicità nella dinamica dei fluidi compressibili. *J. Rational Mech. Anal.*, 2:99–106, 1953.

[58] D. Graffi. Über den Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastichen Körper. *Ingenieur Archiv*, 22:45–46, 1954.

[59] D. Graffi. Il teorema di unicità per i fluidi incompressibili, perfetti, eterogenei. *Rev. Unione Mat. Argentina*, 17:73–77, 1955.

[60] D. Graffi. Sur un théorème d'unicité pour le mouvement d'un fluide visqueux dans un domaine illimité. *Comptes Rendus*, 249:1741–1743, 1959.

[61] D. Graffi. Sul teorema di unicità per le equazioni del moto dei fluidi compressibili in un dominio illimitato. *Atti della Accademia delle Scienze dell'Instituto di Bologna*, 7:56–63, 1960. (Series 11).

[62] D. Graffi. Ancora sul teorema di unicità per le equazioni del moto dei fluidi. *Atti della Accademia delle Scienze dell'Instituto di Bologna*, 8:7–14, 1960. (Series 11).

[63] D. Graffi. Sul teorema di unicità nella dinamica dei fluidi. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 50:379–388, 1960.

[64] D. Graffi. Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni non stazionari. *Atti della Accademia delle Scienze dell'Instituto di Bologna*, 10:33–40, 1963. (Series 11).

[65] D. Graffi. Sulla propagazione nei mezzi dispersivi. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 60:173–193, 1963.

[66] D. Graffi. Su un'equazione integro - differenziale di tipo iperbolico. In *Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica 1962-63*, pages 123–132, Roma, 1965. Cremonese.

[67] D. Graffi. Problemi nonlineari nella teoria del campo elettromagnetico. *Atti Accad. Naz. Modena*, 4:1–12, 1967.

[68] D. Graffi. Sul teorema di unicità per le equazioni del campo elettromagnetico in un plasma. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 84:187–199, 1970.

[69] D. Graffi. Considerazioni sui teoremi di unicità nell'elettromagnetismo non lineare - ereditario. *Rendiconti di Matematica*, 10:457–471, 1977.

[70] D. Graffi. Sul teorema di unicità nell'ottica non lineare. *Rendiconti di Matematica*, 10:539–545, 1977.

[71] D. Graffi. On the fading memory. *Appl. Analysis*, 15:295–311, 1983.

[72] D. Graffi. Personal communication to Prof. F. Franchi. From the Accademia dei Lincei, Roma, 1984.

[73] D. Graffi. L'opera di Vito Volterra sui fenomeni ereditari e alcune sue conseguenze. In *Atti del Convegno Internazionale in memoria di Vito Volterra*, volume 92 of *Atti del Convegni Lincei*, pag. 39–76. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1992. Roma, 8–11 Ottobre, 1990.

[74] D. Graffi. Ancora sul teorema di unicità per le equazioni del moto dei fluidi. In M. Fabrizio, G. Grioli, e P. Renno, editors, *Opere Scelte*, pages 273–280. C.N.R. Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, Bologna, 1999.

[75] D. Graffi. Sul teorema di unicità per le equazioni del moto dei fluidi compressibili in un dominio illimitato. In M. Fabrizio, G. Grioli, e P. Renno, editors, *Opere Scelte*, pages 255–262. C.N.R. Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, Bologna, 1999.

[76] D. Graffi e M. Fabrizio. Sulla nozione di stato per materiali elastici di tipo "rate". *Atti Acc. Lincei Rend. Fis.*, 83:201–208, 1989.

[77] D. Graffi e M. Fabrizio. Non unicità dell'energia libera per materiali viscoelastici. *Atti Acc. Lincei Rend. Fis.*, 83:209–214, 1989.

[78] F. Guillén González, P. Damázio, and M. A. Rojas Medar. Approximation by an iterative method for regular solutions for incompressible fluids with mass diffusion. *J. Math. Anal. Appl.*, 326:468–487, 2007.

[79] S.G. Hartharn-Evans, M. Carr, and D. G. Dritschel. Stratification effects on shoaling internal solitary waves. *J. Fluid Mech.*, 933:A19, 2022.

[80] D. Iesan. Reciprocity, uniqueness and minimum principles in the lineat theory of piezoelectricity. *Int. J. Engng. Sci.*, 28:1139–1149, 1990.

[81] A. V. Kazhikhov e Sh. Smagulov. The correctness of boundary value problems in a diffusion model of an inhomogeneous fluid. *Sov. Phys. Dokl.*, 22:249–250, 1977.

[82] A. V. Kazhikhov e Sh. Smagulov. The correctness of boundary value problems in a certain diffusion model of an inhomogeneous fluid. *Čisl. Metody Meh. Splošn. Sredy*, 7:75–92, 1978.

[83] S. E. King, M. Carr, and D. G. Dritschel. The steady state form of large amplitude internal solitary waves. *J. Fluid Mech.*, 666:477–505, 2011.

[84] G. H. Knightly. On a class of global solutions to the Navier - Stokes equations. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 21:211–245, 1966.

[85] R. J. Knops e B. Straughan. Continuous dependence theorems in the theory of linear elastic materials with microstructure. *Int. J. Engng. Sci.*, 14:555–565, 1976.

[86] M. Lees e M. H. Protter. Unique continuation for parabolic differential equations and differential inequalities. *Duke Math. J.*, 28:369–382, 1961.

[87] J. Li. Global small solutions of heat conductive compressible Navier - Stokes equations with vacuum: smallness on scaling invariant quantity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 237:899–919, 2020.

[88] A. I. Madyarov e B. B. Guzina. A radiation condition for layered elastic media. *J. Elasticity*, 82:73–98, 2006.

[89] A. Morro. Objective equations of heat conduction in deformable bodies. *Mech. Res. Comm.*, 125:103979, 2022.

[90] A. Morro. Thermodynamic restrictions in linear viscoelasticity. *Materials*, 15:2706, 2022.

[91] A. Morro e M. Vianello. Free energy and internal variables in linear viscoelasticity. *Atti Acc. Lincei Rend. fis.*, 83:215–219, 1989.

[92] A. C. Murray e M. H. Protter. The asymptotic behaviour of solutions of second order systems of partial differential equations. *J. Differential Equations*, 13:57–80, 1973.

[93] C. T. Nguyen e J. L. Tassoulas. Reciprocal absorbing boundary conditions for the time - domain numerical analysis of wave motion in unbounded layered media. *Proc. Roy. Soc. London A*, 473:20160528, 2017.

[94] M. Padula. Uniqueness theorems for steady, compressible, heat conducting fluids. *Atti Accad. Naz. Lincei., Classe di Scienze Fisiche, Matem. Nat.*, 74:380–387, 1983. (Series 11).

[95] M. Padula. Existence and uniqueness for viscous steady compressible motions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 97:89–102, 1987.

[96] A. Pignedoli. Sulla determinazione della densità neutronica critica nella teoria matematica della pila atomica a fissione. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 7:105–118, 1961.

[97] G. Prouse. Modelli matematici in inquinamento dei fluidi. *Boll. Unione Matem. Italiana*, 3:1–13, 1984. Series 6.

[98] G. Prouse e A. Zaretti. On the inequalities associated to a model of Graffi for the motion of two viscous incompressible fluids. *Rendiconti Accademia Nazionale delle Science detta dei XL*, 11:253–275, 1987.

[99] J. Serrin. On the uniqueness of compressible fluid motions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 3:271–288, 1959.

[100] B. Straughan. Uniqueness and continuous dependence theorems for the conduction - diffusion solution to the Boussinesq equations on an exterior domain. *J. Math. Anal. Appl.*, 57:203–233, 1977.

[101] B. Straughan. *Stability, and wave motion in porous media*, volume 165 of *Appl. Math. Sci.* Springer, New York, 2008.

[102] B. Straughan. *Heat waves*, volume 177 of *Appl. Math. Sci.* Springer, New York, 2011.

[103] B. Straughan. Effect of temperature upon double diffusive instability in Navier - Stokes - Voigt models with Kazhikhov - Smagulov and Korteweg terms. *Appl. Math. Optimization*, 87:54, 2023.

[104] V. Tibullo e V. Zampoli. A uniqueness result for the Cattaneo - Christov heat conduction model applied to incompressible fluids. *Mech. Res. Commun.*, 38:77–79, 2011.

[105] R. A. Toupin e R. S. Rivlin. Linear functional electromagnetic constitutive relations and plane waves in a hemihedral isotropic material. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 6:188–197, 1960.

[106] C. Truesdell. The simplest rate theory of pure elasticity. *Comm. Pure Appl. Math.*, 8:123–132, 155.

[107] A. Valli. An existence theorem for compressible viscous fluids. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 130:197–213, 1982.

[108] L. T. Wheeler e E. Sternberg. Some theorems in classcial elastodynamics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31:51–90, 1968.

Geometria e Algebra a Bologna dal secondo dopoguerra

Mirella Manaresi, Angelo Vistoli***

Nel 1938 i professori di Matematica nella Scuola di Scienze dell'Università di Bologna sono: Pietro Burgatti, Luigi Fantappiè (dal 1935 comandato presso l'Università di San Paolo in Brasile), Beppo Levi e Beniamino Segre. Dal 1937 al 1939 aveva tenuto corsi di Geometria a Bologna anche Annibale Commessatti, professore a Padova.

Burgatti muore nel maggio 1938, Fantappiè lavora all'estero, Levi e Segre sono costretti ad andare all'estero per colpa delle leggi razziali. Solo Segre tornerà a Bologna nel dopoguerra dal 1945 al 1950, per poi andare a Roma come successore di Francesco Severi. Le leggi razziali hanno stravolto la matematica bolognese.

Cercheremo di esaminare cosa è successo per l'Algebra e la Geometria a Bologna dal secondo dopoguerra, discutendo solo l'attività di matematici che non sono più fra noi.

Mario Villa (1907-1973)

Per quel che riguarda la Geometria, in seguito alle perdite di cui si è detto, nel 1939 arriva a Bologna, sulla cattedra di Geometria Analitica e Proiettiva, Mario Villa, che era stato ternato in un concorso a cattedre bandito dall'Università di Torino nel 1938.

Nato nel 1907 a Castelgoffredo (Mantova), Mario Villa si laurea in Matematica a Pavia nel 1930 con Luigi Belzolari. Nel 1931-1932 è a Parigi con una borsa di studio presso l'Istituto Henry Poincaré, dove studia con Elie Cartan. Nel 1932 Villa diviene assistente presso l'Università di Pavia e incaricato a Genova, nel 1933 consegue la Libera Docenza in Geometria Analitica e Proiettiva. A Bologna Villa rimane fino alla morte, tenendo gli insegnamenti di Geometria Superiore, Geometria Differenziale e Matematiche Complementari, oltre a dirigere per anni un Corso di perfezionamento in Matematiche Elementari da un punto di vista superiore.

*Dipartimento di Matematica, Alma Mater Studiorum – Università di Bologna. E-mail: mirella.manaresi@unibo.it
**Scuola Normale Superiore, Pisa. E-mail: angelo.vistoli@sns.it

La sua produzione scientifica comprende circa un centinaio di lavori riguardanti vari campi della Geometria e della Didattica della Matematica. Le sue ricerche hanno come temi la Geometria Proiettiva di enti algebrici 1934-1935), la Geometria sul campo complesso e degli enti iperalgebrici dal 1936, la Geometria Proiettivo-Differenziale dal 1938.

Dal 1945 al 1969 Villa ricopre la carica di Segretario dell'Unione Matematica Italiana. Muore a Bologna nel 1973.

Beniamino Segre (1903–1977)

La figura scientificamente più rilevante tra quelle che prendiamo in considerazione è sicuramente quella di Beniamino Segre.

Egli nasce a Torino nel 1903 e qui, a partire dal 1919, frequenta l'Università, laureandosi nel 1923 con Corrado Segre, a cui era legato da vincoli di parentela. Tra i suoi maestri a Torino, oltre a Corrado Segre, ci sono Giuseppe Peano, Gino Fano, Guido Fubini e Carlo Somigliana.

Nello stesso anno della laurea, oltre a pubblicare un articolo legato alla sua tesi, pubblica un articolo di idrodinamica, in cui viene studiata l'origine degli anticicloni. Fino al 1926 Segre resta a Torino come assistente, nel 1926-27 va a Parigi da Elie Cartan, con una borsa della fondazione Rockefeller, poi diventa assistente di Francesco Severi a Roma. Nel volume *Mathematicians in Bologna 1861-1960* [C], edito da Salvatore Coen, Edoardo Sernesi [Se] fa un quadro molto interessante e completo dei risultati di Beniamino Segre sulle curve algebriche e i loro moduli ottenuti all'inizio della sua carriera, tra il 1928 e il 1930, quando era assistente di Severi a Roma.

Quando nel 1931 ottiene una cattedra di Geometria a Bologna Segre ha già 40 pubblicazioni, che vanno dalla Geometria Algebrica alla Geometria Differenziale, dalla Topologia alle equazioni differenziali. Durante il primo periodo bolognese continua a pubblicare profusamente, soprattutto su questioni classiche di teoria delle superfici.

Il 16 ottobre 1938 Segre viene espulso dall'Università di Bologna per via delle leggi razziali ed è costretto a rifugiarsi in Inghilterra, insieme alla moglie e ai tre figli, e qui passa un periodo molto duro, come raccontato da P. Du Val [D]. Dopo un soggiorno a Londra e Cambridge, nel 1940, in seguito all'entrata in guerra dell'Italia, Segre viene mandato senza la famiglia nell'Isola di Man come "nemico straniero"; nello stesso anno perde il figlio più piccolo. Poi, nel 1942, ottiene una posizione di docente a Manchester con Louis Mordell.

Nonostante le grandi difficoltà personali, il periodo inglese è scientificamente produttivo: gli interessi scientifici di Segre sono rivolti in parte al tentativo di estendere a varietà complesse lisce di dimensione maggiore o uguale a tre risultati suoi e risultati di Severi per le superfici, ma inizia anche a nascere in lui un forte interesse per gli aspetti combinatorici della Geometria. Per esempio, nella monografia *The non-singular cubic* *surfaces* [S1], scritta a Cambridge nel 1941, Segre studia gli aspetti combinatorici della struttura delle 27 rette su una superficie cubica. Nel periodo trascorso a Manchester Segre ottiene importanti risultati in Geometria Algebrica, ma anche sulle equazioni diofantee e l'aritmetica delle varietà algebriche, stimolato dalle discussioni con Mordell e con Kurt Mahler.

Nel 1946 Segre torna a Bologna, dove rimane fino al 1950, anno in cui va a Roma come successore di Francesco Severi. Come afferma Vesentini in [V1], dall'Inghilterra Segre ritorna con nuovi temi di ricerca e con una visione più ampia e più matura della matematica.

Nell'a.a. 1946/47 a Bologna Segre tiene un corso da cui ha origine il volume delle *Lezioni di geometria moderna* [S2], dedicato ai fondamenti della Geometria su un campo arbitrario. Segre pensava che a questo primo volume ne sarebbero seguiti altri due, dedicati rispettivamente alla Geometria Proiettiva non lineare con applicazioni aritmetiche e al gruppo delle applicazioni birazionali. Questo progetto editoriale non andò in porto, ma tredici anni dopo uscì l'edizione inglese delle *Lezioni* [S9], molto ampliata rispetto a quella italiana, soprattutto nei capitoli sugli spazi di Galois e sui piani grafici non desarguesiani e con l'aggiunta di nuovi capitoli. In quei tredici anni e in quelli successivi l'interesse scientifico di Segre è prevalentemente rivolto ai campi finiti e alla loro applicazione allo studio di spazi lineari finiti. L'interesse per gli aspetti combinatorici della Geometria era già molto evidente in un lavoro del 1949 sulla configurazione delle 27 rette su una superficie cubica su un campo qualsiasi, anche finito (si veda [S3]). In [S7] e [S8] Segre caratterizza le ovali nei piani finiti e questi risultati saranno successivamente generalizzati agli spazi tridimensionali da A. Barlotti e G. Panella. La Geometria Combinatorica iniziata da Segre andrà poi a influenzare la combinatoria algebrica sviluppata da Gian Carlo Rota e altri.

Nel 1950 Segre aveva fatto tre lezioni a Londra, pubblicate nel 1951 come *Arithmetical questions on algebraic varieties* [S4], in cui poneva molte domande su quali risultati continuassero a valere cambiando il campo base. Nell'ultima parte della sua vita Segre si dedica allo studio della Geometria su campi diversi da quello dei numeri complessi e nel lavoro *Le geometrie di Galois* [S10] del 1967 sono raccolti i principali risultati da lui ottenuti.

Due tra i lavori più importanti di Segre in Geometria Algebrica vengono pubblicati poco dopo il periodo bolognese. Nel 1952 esce la sua dimostrazione rigorosa dell'esistenza della risoluzione delle singolarità di una superficie algebrica (si veda [S5]), nel 1953 viene pubblicato uno dei suoi lavori in assoluto più importanti [S6], in cui introduce quelle che sono ora note come *classi di Segre*, che giocano un ruolo fondamentale in teoria dell'intersezione (si veda William Fulton, *Intersection Theory* [F]) e nello studio degli spazi singolari (si veda Paolo Aluffi [A]).

Il primo studente di Segre a Roma è stato Edoardo Vesentini, che lo ha commemorato in [V1] [V2] e [V3] con molti ricordi personali; il più noto allievo di Segre nel campo delle Geometrie Finite è stato Giuseppe Tallini. Segre muore a Frascati nel 1977.

Antonio Rosati (1923-2011)

Nel 1969 viene chiamato a Bologna sulla prima cattedra di Algebra per l'Ateneo Luigi Antonio Rosati, che rimarrà solo due anni a Bologna, prima di trasferirsi a Firenze nel 1971.

Rosati, dopo essersi laureato a Firenze, per alcuni anni è professore di Matematica presso un Istituto Tecnico, pur continuando a pubblicare lavori di teoria dei numeri. Nel 1954-55 inizia a collaborare con Guido Zappa, spostando i propri interessi scientifici sulla teoria dei gruppi e le geometrie finite. Nel 1964-65 risulta vincitore di un concorso a cattedre di Algebra presso l'Università di Catania, per poi passare all'Università di Modena e successivamente a Bologna, dove avvia alla ricerca su problemi di teoria dei gruppi due giovani matematici. Nel lavoro di Guido Zappa (*Luigi Rosati studioso e maestro* [Z2], 1996) viene presentato un quadro dei risultati ottenuti da Rosati nell'arco della sua carriera.

Adriano Barlotti (1923–2008)

Un anno dopo la partenza di Rosati, nel 1972 arriva a Bologna Adriano Barlotti.

Nato a Firenze nel 1923, Adriano Barlotti inizia a studiare matematica a Firenze nel 1942. Laureatosi con Luigi Campedelli, nel 1953 incontra Guido Zappa e, influenzato da lui, inizia a lavorare in Geometria Finita, sulla scia di lavori di Lucio Lombardo Radice, Beniamino Segre e dello stesso Zappa. Studia dapprima archi e calotte in spazi proiettivi finiti, poi cerca di generalizzare un risultato di H. Lenz, che nel 1954 aveva studiato i piani proiettivi in base al numero delle coppie punto-retta (*A, a*), con il punto A che appartiene alla retta a, rispetto alle quali un piano proiettivo è (*A, a*)-transitivo e aveva dato un limite superiore per questo numero. Barlotti toglie la limitazione che il punto appartenga alla retta e arriva a quella che è nota come classificazione di Lenz-Barlotti dei piani proiettivi. Ognuna delle classi di Lenz si spezza in più sottoclassi di Barlotti e queste risultano in totale 24. L'appartenenza di un piano proiettivo ad una classe si riflette in proprietà dell'anello ternario di Marshall Hall collegato al piano stesso. Questa classificazione è stata punto di partenza per molte ricerche nel settore, sia nel tentativo di costruire esempi di piani proiettivi appartenenti alle singole classi, sia per provare che qualche classe non contiene alcun piano proiettivo o alcun piano proiettivo finito.

Invitato da R.C. Bose, Barlotti passa l'anno accademico 1964-1965 a Chapel Hill presso la University of North Carolina, dove inizia una serie di ricerche volte a costruire ogni piano non desarguesiano partendo da spazi proiettivi a più dimensioni. Il primo esempio di piano non desarguesiano era stato costruito da Hilbert nel 1901 e l'anno successivo, semplificando l'esempio di Hilbert, l'astronomo americano Forest Ray Moulton aveva fornito un esempio ora noto come piano di Moulton.

Nel 1967 Barlotti diventa professore straordinario presso l'Università di Palermo, ma alla fine dello stesso anno si trasferisce a Perugia. Tra il 1967 e il 1971 Barlotti rimane a Perugia, dove è uno degli artefici della nascita del corso di Laurea in Matematica ed è la guida di un gruppo che riunisce, intorno a numerosi visitatori stranieri, molti giovani ricercatori. Nel 1972 si trasferisce a Bologna, prima su una cattedra di Algebra, poi di Geometria.

Soprattutto ad opera di Beniamino Segre e di Guido Zappa la scuola italiana di Geometria Combinatorica si era nel frattempo consolidata, ottenendo risultati importanti, e, insieme a Giuseppe Tallini, Barlotti ne diventa un punto di riferimento.

Adriano Barlotti rimane 10 anni a Bologna, per poi tornare a Firenze nel 1982 su una cattedra di Matematiche Complementari, dove resterà fino alla fine della sua carriera accademica. Negli anni bolognesi Barlotti è la guida di un gruppo di giovani ricercatori, alcuni dei quali sono stati da lui stesso indirizzati verso nuovi campi di ricerca in Geometria Combinatorica, che venivano sviluppati in quegli anni, in particolare da Gian Carlo Rota. L'ambiente scientifico che Barlotti sviluppa a Bologna, grazie anche all'invito di numerosi professori visitatori, è molto vivace e favorevole alla crescita dei giovani, alcuni dei quali diventeranno professori a Bologna o in altre università.

Un incontro fondamentale per l'attività scientifica di Adriano Barlotti è quello con Karl Strambach, professore ad Erlangen, che diventa il principale collaboratore dell'ultima parte della sua carriera. Tra i due nasce un sodalizio scientifico e un'amicizia, che resteranno fortissimi fino alla morte di Barlotti. Insieme Barlotti e Strambach lavorano sulla "Geometria dal punto di vista di von Staudt", cercando di stabilire se certi tipi di piani possono essere caratterizzati da proprietà del gruppo delle proiettività di una retta in sé. Nei loro lavori Barlotti e Strambach costruiscono esempi di piani affini, proiettivi, di Benz (di Moebius, di Laguerre, di Dembowski) in cui il gruppo delle proiettività di una retta in sé ha comportamenti di tipo patologico.

Barlotti è stato commemorato in [Fa] e [GLS].

Paolo Salmon (1930-2018)

Dopo un anno dal trasferimento di Barlotti a Firenze, nel novembre 1983, arriva a Bologna Paolo Salmon. La sua venuta è frutto di una decisione improvvisa e inaspettata, anche per sua famiglia.

Nato a Firenze nel 1930, Paolo Salmon, normalista, si laurea a Pisa nel 1952 con Giovanni Dantoni, geometra algebrico della scuola italiana classica. Subito dopo la laurea inizia a lavorare sotto la guida scientifica di Aldo Andreotti, pisano, allievo di Francesco Severi, che dal 1951 era stato chiamato da Alessandro Terracini su una cattedra a Torino.

Andreotti aveva trascorso un periodo di studio negli Stati Uniti, dove aveva conosciuto Weil, Kodaira, Spencer, Lefschetz, Zariski e, grazie a questi, aveva iniziato a distaccarsi dall'impostazione tipica della scuola italiana di Geometria Algebrica e a utilizzare nuovi metodi algebrici, analitici e differenziali. Andreotti aveva anche stabilito rapporti con il matematico austriaco Wolfang Groebner, anche lui allievo di Severi, che aveva trascorso un periodo a Gottinga da Emmy Noether, dove aveva imparato la teoria degli ideali e i metodi algebrici alla base della Geometria Algebrica.

Andreotti è forse l'unico in Italia a presentare agli studenti la teoria degli ideali, soprattutto negli anelli di polinomi, in anni in cui l'Algebra non è ancora presente nei corsi di laurea in Matematica. L'Algebra entrerà nel piano di studi della laurea in Matematica solo nel 1960, in sostituzione della Chimica, fino a quel momento obbligatoria. Anche fuori dell'Italia pochi erano i corsi introduttivi all'Algebra. Negli Stati Uniti il testo di riferimento era *Algebra* di Birkhoff–Mac Lane [BM], in Italia esisteva il testo di Guido Zappa [Z1] *Gruppi, corpi, equazioni*.

Dopo un anno a Roma con una borsa dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica, dal 1954 al 1958 Paolo Salmon è professore incaricato a Torino, dove inizia a lavorare con Andreotti a quello che può essere considerato il primo lavoro di Algebra Commutativa in Italia (*Anelli con unica decomponibilità in fattori primi ed un problema di intersezioni complete* [AS]), il cui risultato principale asserisce che dato un anello A e un suo ideale primo p, l'anello A/p è fattoriale se e solo se tutte le sottovarietà irriducibili W di codimensione 1 della varietà $V = V(p)$ associata all'ideale p, sono intersezioni complete di V con una ipersuperficie $V(f)$ di K^n, ossia se e solo se l'ideale $I(W)$ si può esprimere come $I(W) = p + (f)$. In termini algebrici questo teorema dice che un dominio noetheriano R è fattoriale se e solo se ogni ideale primo di altezza 1 è principale.

Nel 1958 Salmon torna a Pisa e nel 1961 conosce a Firenze Pierre Samuel, che aveva appena lavorato con Oscar Zariski ai due volumi di Algebra Commutativa dello Zariski-Samuel [ZS] e che in quel periodo si occupava di problemi di fattorialità. Dal 1961 al 1963 Salmon va a Parigi da Pierre Samuel e lavora su varie tematiche di Algebra Commutativa quali fattorialità, algebra simmetrica, algebra di Rees, anelli graduati, serie ristrette e convergenti. In uno di questi lavori trova un controesempio a una congettura di Samuel, che gli dà notorietà internazionale.

Nel 1964 viene bandito il primo concorso di Algebra in Italia e Salmon è uno dei tre vincitori e viene chiamato all'Università di Genova. Qui, insieme ad una intensa attività didattica, testimoniata anche dal suo testo *Algebra* [Sa1], pubblicato nei 1972, inizia la sua attività di guida nell'avviamento dei giovani alla ricerca. Il primo giovane a rivolgersi a lui è Silvio Greco, laureatosi a Pisa e dopo di lui gli allievi di Salmon saranno molto numerosi, perché molti giovani colleghi si rivolgeranno a lui per essere indirizzati e aiutati nella ricerca.

Claudio Procesi, nel suo intervento al convegno bolognese del marzo 2019 *Paolo Salmon e l'Algebra Commutativa in Italia* https://eventi.unibo.it/salmon2019, ha scritto: "Salmon, insieme a pochi altri, fa parte di quella generazione che ha avuto due compiti importanti: creare gli standard (ed i testi) dell'insegnamento dell'Algebra in Italia e formare la prima generazione di algebristi italiani".

Uno dei temi proposti da Salmon a Greco riguardava lo studio del gruppo di Picard di un anello commutativo. Era noto che questo gruppo è banale per certe classi di anelli, ad esempio gli anelli a fattorizzazione unica o gli anelli locali, ma non si sapeva molto di più su quando questo gruppo fosse banale, né sul suo comportamento rispetto ad estensioni quali polinomi e serie formali. Paolo Salmon [Sa2] si accorse che il gruppo di Picard dell'anello $k[x,y]/(xy)$ è banale e questo suggerì a Carlo Traverso in [T] di collegare la banalità di questo gruppo alla nozione di seminormalità introdotta da Andreotti e Bombieri in [AB]. Da questi lavori ha preso avvio un filone di ricerca sulla seminormalità a cui hanno lavorato molti degli allievi di Salmon e degli allievi di suoi allievi, in varie università italiane.

Nel 1965 a Varenna Salmon incontra David Buchsbaum, professore a Brandeis. esperto di questioni omologiche e autore di importanti lavori scientifici. Nel 1959, insieme ad Auslander, Buchsbaum aveva provato che gli anelli locali regolari sono fattoriali. Tra Salmon e Buchsbaum nasce una profonda amicizia e un sodalizio scientifico. Salmon e molti dei suoi allievi passeranno periodi di studio alla Brandeis presso Buchsbaum o alla Northeastern da Eugene Gover, ex allievo di Buchsbaum e collaboratore di Salmon.

Nel 1983 Salmon si trasferisce a Bologna, dove svolge un'intensa attività didattica, avvia alla ricerca alcuni giovani ricercatori e partecipa attivamente all'attività scientifica di un gruppo di giovani di formazione diversa che ha in lui il punto di riferimento. Alla fine del 1988 viene a Bologna per la prima volta Rahim Zahare Nahandi, allora professore dell'Università di Teheran. Zaare Nahandi aveva fatto il dottorato nel Minnesota con Joel Roberts sulla seminormalità di certe proiezioni generiche e, tornato a Teheran, si sentiva matematicamente isolato. Come scrive lui stesso, Paolo Salmon lo ha aiutato a trovare un filone di ricerca, che è stato l'inizio di una lunga collaborazione, da cui sono nati tre lavori: due riguardanti punti tripli analiticamente irriducibili ([SZ1] e [SZ2]) e uno ([SZ3] su ideali di minori che definiscono singolarità generiche. Le tematiche di questi lavori sono sicuramente legate a quelle della tesi di dottorato di Zaare Nahandi, ma l'impronta di Paolo Salmon è molto forte.

Nel corso degli anni, in conferenze e seminari, oltre a divulgare temi di Geometria Algebrica e Algebra Commutativa, Salmon aveva parlato più volte della propria idea di una *"didattica collegata alla ricerca"* e nel 1989 passa dalla cattedra di Geometria a quella di Matematiche Elementari, diventando punto di riferimento indiscusso dell'indirizzo didattico della laurea in Matematica e dove riesce a sviluppare le idee già enunciate al Congresso UMI di Palermo del 1979: "Non si può accettare una separazione netta e definitiva tra la ricerca avanzata, riservata agli specialisti, e una didattica dai contenuti limitati. La riflessione critica sulle teorie elevate deve portare ad uno sforzo continuo di "elementarizzazione"di tutti i contenuti di tali teorie. La ricerca di esempi semplici ma significativi, che consentano una pur parziale comprensione di proprietà profonde e riposte, può costituire al tempo stesso un punto di partenza per una didattica collegata alla ricerca avanzata ed un avvio di ricerche di carattere elementare, non degne forse di pubblicazione su riviste specializzate ma sempre molto utili se non indispensabili ad una penetrazione nel vivo di una tematica. . .".

Tra il 1990 e il 2002 Salmon è stato relatore di 123 tesi di laurea, prevalentemente dell'indirizzo didattico, su argomenti di Algebra, Geometria, Storia della Matematica, Logica e alcuni dei suoi laureandi hanno fatto brillanti carriere anche nell'industria e nella pubblica amministrazione. Fino alla fine della sua carriera Salmon ha continuato a lavorare scientificamente nel modo che gli era più congeniale: pensando sempre ad esempi semplici su cui ragionare, fare calcoli e porsi domande. Era questo il modo che gli aveva consentito di trovare il controesempio alla congettura di Samuel e di studiare quegli esempi che hanno fatto capire a Traverso il legame tra seminormalità e gruppo di Picard. Nel 1991 Salmon scrive "ho imparato da Andreotti che si può cercare, con opportuni esempi, di rendere più elementari le cose complicate e che ogni introduzione storica è gradita all'uditorio. Ho poi cercato di arrecare apporti personali all'insegnamento ricevuto, sottolineando sempre l'aspetto storico accanto a quello scientifico".

In [V] Paolo Valabrega ha ricordato Paolo Salmon e le origini dell'Algebra Commutativa in Italia.

Negli ultimi vent'anni il gruppo dei docenti di Algebra e Geometria bolognese è molto mutato, con arrivi di docenti formatisi in altre università italiane e straniere.

I temi di ricerca coltivati ora a Bologna coprono Combinatoria Algebrica ed Enumerativa, Teoria dei gruppi, teoria di Lie e teoria della rappresentazione, algebra commutativa, Geometria Algebrica, Geometria Complessa, Topologia Geometrica, Teoria Geometrica dei gruppi.

Bibliografia

[A] P. Aluffi: *Segre Classes and Invariants of Singular Varieties*, in *Handbook of Geometry and Topology of Singularities III*, Springer-Verlag, 2022.

[AB] A. Andreotti, E. Bombieri: *Sugli omeomorfismi delle varietà algebriche*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (3) 23 (1969), 431-450.

[AS] A. Andreotti, P. Salmon: *Anelli con unica decomponibilità in fattori primi e un problema di intersezioni complete*. Monatsh. Math., 61 (1957), 97-142.

[BM] G. Birkoff - S. MacLane: *A survey of modern algebra*, Macmillan Co., New York, N. Y., 1953.

[C] S. Coen (Editor): *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Birkhäuser, Basilea, 2014.

[D] P. Du Val: *Beniamino Segre.* Bull. London Math. Soc., 11 (1979), 215-235.

[Fa] G. Faina: *Adriano Barlotti (1923-2008)*. Acc. Naz. Sci. Lett. Arti Modena Atti (a.a. 2007-2008), s. VIII, vol. XI (2009), 79-86.

[F] W. Fulton: *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[GLS] T. Grundhöfer, G. Lunardon, K. Strambach: *Adriano Barlotti*. Advances in Geometry, Special Issue (2003), SIII.

[Sa1] P. Salmon: *Algebra*, Ed. Tecnico Scientifica, Pisa, 1973.

[Sa2] P. Salmon: *Singolarità e gruppo di Picard*, in *Symposia Mathematica*, vol. II, INDAM, Roma, 1968, Academic Press, London, 1969, 341-345.

[SZ1] P. Salmon, R. Zaare Nahandi: *Sui punti tripli con cono tangente triplo.* Atti Accad. Sc. Ist. Bologna, s. XIV, t. VI (1988-89), 93-100.

[SZ2] P. Salmon, R. Zaare Nahandi: *Proprietà algebriche di alcuni punti tripli analiticamente irriducibili*. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 49 (1991), n. 1, 41-70.

[SZ3] P. Salmon, R. Zaare Nahandi: *Ideals of minors defining generic singularities and their Gröbner bases.* Comm. Algebra, 33 (2005), n. 8, 2725-2747.

[Se] E. Sernesi: *The Work of Beniamino Segre on Curves and Their Moduli*, in *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Birkhäuser, Basilea, 2014, 439-450.

[S1] B. Segre: *The non-singular cubic surfaces*, The Claredon Press, Oxford, 1942.

[S2] B. Segre*: Lezioni di Geometria Moderna*, vol. I, Zanichelli, Bologna, 1948.

[S3] B. Segre: *Le rette delle superficie cubiche nei corpi commutativi.* Boll. Un. Mat. Ital., (3) 4 (1949), 223-228.

[S4] B. Segre: *Arithmetical Questions on Algebraic Varieties*, The Athlone Press, London, 1951.

[S5] B. Segre: *Sullo scioglimento delle singolatità delle varietà algebriche*. Ann. Matem. Pura Appl., vol. 33 (1952), n. 4, 5-48.

[S6] B. Segre: *Nuovi metodi e resultati nella geometria sulle varietà algebriche*. Ann. Matem. Pura Appl., vol. 35 (1953), n. 4, 1-127.

[S7] B. Segre: *Sulle ovali nei piani lineari finiti*. Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) 17 (1954), 1-2.

[S8] B. Segre: *Ovals in a finite projective plane.* Canadian J. Math., 7 (1955), 414-416

[S9] B. Segre: *Lectures on modern geometry*, Cremonese, Roma 1961.

[S10] B. Segre: *Introduction to Galois geometries*. Mem. Acc. Naz. Lincei, (8) 8 (1967), 133-236.

[T] C. Traverso: *Seminormality and Picard Group*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, s. 3, vol. 24 (1970), n. 4, 585-595.

[V] P. Valabrega: *Paolo Salmon e le origini dell'Algebra Commutativa in Italia*. Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana, s. I, vol. 4 (2019), n. 1, 67-71.

[V1] E. Vesentini: *Beniamino Segre (1903-1977).* Boll. Un. Mat. Ital., (5) 15-A (1979), 83-93.

[V2] E. Vesentini: *Beniamino Segre and Italian Geometry*. Rend. di Matem., s. VII, vol. 25 (2005), 185-193.

[V3] E. Vesentini: *Introduzione alle Opere Scelte di Beniamino Segre*, Ed. Cremonese, 1987.

[Z1] G. Zappa: *Gruppi, corpi, equazioni*, Libreria Editrice Liguori, Napoli, 1954.

[Z2] G. Zappa: *Luigi Antonio Rosati studioso e maestro.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, XLIV (1996), 27-42.

[ZS] O. Zariski - P. Samuel: *Commutative Algebra*, voll. I e II, The University Series in Higher Mathematics D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, New Jersey, 1958.

Ulteriori Letture

G. Cimmino: *Mario Villa*, in *Annuari dell'Alma Mater Università di Bologna 1972-74*, 411-412.

E. Marchionna: *Ricordo di Beniamino Segre*, in *Scritti scelti di Beniamino Segre* (2 voll.), Unione Matematica Italiana.

M. Mussolini, F. Desalvo: *Le radici del Dipartimento di Matematica negli Annuari dell'Ateneo (dal XII secolo a oggi)*, Alma Mater Studiorum, Università di Bologna, Bologna, 2018. https://matematica.unibo.it/it/dipartimento/presentazione/storia

B. Segre: *Opere scelte* (2 voll.), a cura dell'U.M.I., Ed. Cremonese, 1987.

UniBO si apre al mondo: un racconto personale del primo collegamento a Internet

*Ozalp Babaoglu**

1. Introduzione

Questo articolo è basato sul seminario che ho tenuto all'Accademia delle Scienze nel mese di novembre del 2021, un anno importante per me in quanto ha segnato il 40º anniversario del mio dottorato di ricerca e l'inizio della mia carriera accademica, nonché il 33º anniversario del mio arrivo in Italia, all'età di 33 anni. L'introduzione di Internet all'UniBO è stata il risultato del lavoro di squadra di molte persone. Quello che sto per raccontare è una visione strettamente personale e fortemente influenzata dalla mia formazione negli Stati Uniti, in particolare durante gli anni trascorsi all'Università della California, Berkeley, durante il mio dottorato di ricerca. Cercherò di costruire una cronologia delle principali attività svolte a Bologna e di collocarle in un contesto più ampio dello sviluppo di Internet a livello mondiale.

2. Capitolo americano

Mi sono trasferito negli Stati Uniti nel 1969 a seguito di un secondo incarico di mio padre presso l'ambasciata turca. Il primo incarico di mio padre era stato infatti in Iraq, a Baghdad, e il secondo a Washington D.C. dove rimasi fino al 1976, conseguendo il diploma nel 1972, e successivamente la laurea. Arrivai a UC Berkeley dove ero stato ammesso come studente di dottorato di ricerca in Informatica nell'agosto del 1976 dopo essermi laureato presso la George Washington University. L'anno precedente al mio arrivo, Ken Thompson dei *Bell Laboratories* era stato a Berkeley per un anno sabbatico e aveva portato con sé una copia del sistema Unix/v8, che aveva installato su un minicomputer PDP-11/70 presso il Dipartimento di Informatica. Il sistema Unix era stato sviluppato da Thompson insieme al suo collega Dennis Ritchie presso i Bell Laboratories nel 1970.

*Dipartimento di Informatica – Scienza e Ingegneria (DISI), Alma Mater Studiorum – Università di Bologna. E-mail: ozalp.babaoglu@unibo.it

Nel 1983 Thompson e Ritchie ricevettero il premio Turing, il massimo riconoscimento nel campo dell'Informatica, spesso paragonato al premio Nobel, per lo sviluppo del sistema Unix.

Negli anni '70 e '80, le università di Berkeley e Stanford sono state i motori che hanno dato vita alla *Silicon Valley*. Quando sono arrivato, a Berkeley si respirava un'aria effervescente, piena di dinamismo e di iniziative. Il corpo docente del Dipartimento di Informatica includeva illustri professori come: Richard Karp (Premio Turing 1985), William Kahan (Premio Turing 1989), Manuel Blum (Premio Turing 1995), Michael Stonebraker (Premio Turing 2014) e David Patterson (Premio Turing 2017).

Tra gli studenti di dottorato di ricerca, invece, vi erano: Silvio Micali (riceverà il Premio Turing nel 2012), Shafi Goldwasser (riceverà il Premio Turing nel 2012 assieme a Micali), Eric Schmidt (diventerà primo CEO di Novell nel 1997 e poi CEO di Google dal 2001 al 2011), Dave Ditzel (fonderà la Transmeta Corporation nel 1995), Dale Skeen (fonderà la Vitria Technology nel 1994), Randy Katz (diventerà coinventore del RAID nel 1988 assieme a Patterson) e Bill Joy (all'epoca creatore di software come *ex*, *vi*, *C-shell*, successivamente diventerà cofondatore della Sun Microsystems nel 1982 e svilupperà il processore SPARC e contribuirà allo sviluppo del linguaggio Java).

Il primo anno del dottorato era dedicato a seguire corsi e superare i temutissimi esami "*qualifiers*" per poter continuare con gli studi. Sempre durante il mio primo anno, ho conseguito il titolo di "Master of Science" scrivendo una tesi su un supporto hardware per velocizzare il gioco degli scacchi da parte di un computer [1]. La tesi era stata seguita dal Prof. Alvin Despain ed era ispirata dal computer scacchistico *Belle* sviluppato da Ken Thompson e Joe Condon dei Bell Laboratories. Dopo aver superato i *qualifiers*, nel 1977 iniziai l'attività di ricerca per il dottorato sotto la supervisione del Prof. Domenico Ferrari. Nell'anno successivo, il Dipartimento acquistò un VAX-11/780 della *Digital Equipment Corporation* (Fig. 1), segnando una discontinuità con la precedente linea PDP-11, in quanto l'architettura VAX era a 32-bit e implementava la memoria virtuale. Nel 1979, Tom London dei Bell Labs di Holmdel riscrisse Unix/v8 per la nuova architettura VAX, questo sistema è noto come Unix/32V. Sempre nel 1979, iniziai a lavorare con Bill Joy sul supporto della memoria virtuale nel sistema Unix/32V [2]. Una riscrittura completa di Unix/32V, che includeva il mio codice per la memoria virtuale, fu rilasciata come terza versione della *Berkeley Software Distribution* (3BSD) nel 1979 (le prime due versioni, BSD 1 e 2, erano opera di Bill Joy e comprendevano applicativi come *ex*, *vi*, *C-shell*, ma non costituivano un sistema operativo completo). La versione 3BSD fu fondamentale affinché Berkeley ottenesse un importante contratto dalla *Defense Advanced Research Projects Agency* (DARPA) del Ministero della Difesa degli Stati Uniti per lo sviluppo di una piattaforma standard per progetti finanziati e per soddisfare i requisiti della nascente rete *ARPAnet*.

Nel giugno del 1986, UC Berkeley rilascia la versione 4.3BSD, che include il codice di Bill Joy per TCP/IP, il nuovo protocollo di comunicazione sulle reti digitali, e presto diventa il sistema operativo più diffuso su calcolatori VAX. Il rilascio di 4.3BSD

Figura 1. Il VAX-11/780, scherzosamente chiamato “Ernie CoVax” per assonanza col nome dell’attore televisivo americano Ernie Kovacs.

probabilmente è stato l’evento più significativo per innescare la rivoluzione di Internet. L’elegante implementazione di TCP/IP di Bill Joy, basata sull’astrazione dei *sockets*, ha reso la programmazione delle applicazioni di rete semplice come scrivere programmi che interagiscono con dei file. Nel 1980, il Prof. Bob Fabry fondò a Berkeley il *Computer Systems Research Group* (CSRG), composto da studenti e programmatori professionisti, che diventò il nucleo centrale per lo sviluppo del sistema Unix. Durante il suo 25º convegno nel 1994, la *Usenix Association* distribuisce come ricordo un mazzo di carte da gioco con le immagini di molti membri del CSRG (Fig. 2). Durante il mio dottorato a Berkeley, seguo diversi corsi di lingua italiana, per pura passione. Nel 1980 Domenico Ferrari prende un anno sabbatico e va all’Università Cattolica di Piacenza. Riesce a ottenere una borsa di studio della durata sei mesi per ospitarmi all’*Istituto di Analisi Numerica* del CNR a Pavia, diretto dal Prof. Enrico Magenes. Durante mio soggiorno italiano, conosco due

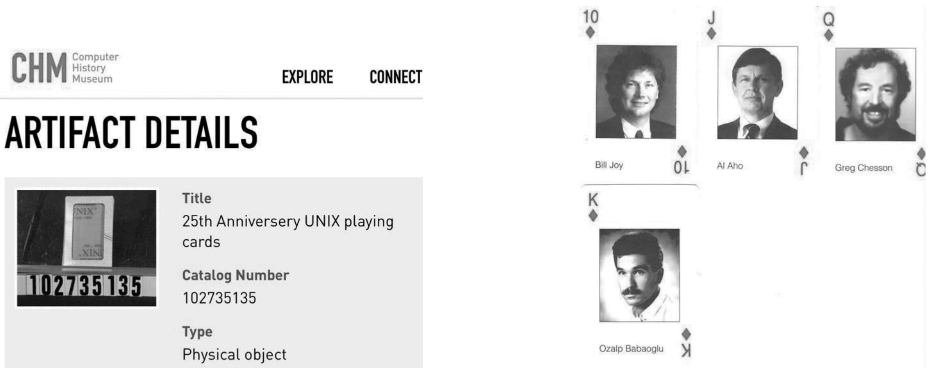


Figura 2. Il mazzo di carte, oggi custodito al *Computer History Museum* a Boston, con le immagini di alcuni “early members of the Unix community”.

personaggi importanti: il primo è il Prof. Giuseppe Serazzi, che all'epoca insegnava a Pavia, il secondo è Orazio Biasi, che ho conosciuto a una scuola organizzata da Ferrari a Sogesta, appena fuori Urbino. Biasi è un giovane laureato in fisica dell'Università di Bologna che all'epoca lavorava al CINECA. Con Biasi diventammo molto amici e mi recai a trovarlo diverse volte a Bologna. In una di queste visite, su suggerimento del Prof. Magenes, ho potuto conoscere il Prof. Ilio Galligani del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

Nell'estate del 1981, dopo aver trascorso 4 mesi in Turchia per adempiere al servizio militare obbligatorio, torno a Berkeley e completo la mia tesi di dottorato. Ritorno a Berkeley con un'idea fissa nella testa: un giorno mi piacerebbe vivere in Italia, a Bologna. Nell'agosto del 1981, accetto l'offerta della Cornell University dove avevo svolto un colloquio prima di partire per la Turchia e prima di completare il mio dottorato di ricerca e presentare la mia tesi (cosa che ho effettuato da remoto nel dicembre del 1981) [3].

Nel 1981, la *National Science Foundation* (NSF) estende ARPAnet e finanzia una nuova iniziativa denominata *CSNET*. Nel 1982, il protocollo TCP/IP viene adottato come lingua franca per tutte le reti finanziate dal *Ministero della Difesa* Americana. Nel 1983, la rete ARPAnet completa la transizione dal protocollo NCP al nuovo protocollo TCP/IP. Nel 1985, Cornell diventa uno dei sei nodi della nuova rete denominata *NSFNET* finanziata dalla NSF.

Nel 1985 partecipo al concorso nazionale in Italia per professori di prima fascia con l'aiuto del Prof. Serazzi, che mi fa acquisire familiarità con la burocrazia italiana attraverso concetti come "carta bollata" e "spedizione postale con avviso di ricevimento". Serazzi gioca un ruolo fondamentale nella presentazione della mia domanda al ministero in tempi utili. Quando il concorso si conclude nel 1986, con grande sorpresa di tutti, un trentunenne, straniero, senza alcun sponsor italiano, risulta tra i vincitori nel settore disciplinare Informatica. Tuttavia, per due anni il concorso va in tilt a causa dell'ambiguità sulla questione della "reciprocità" tra la Turchia e l'Italia per quanto riguarda le cattedre accademiche**.

Il Prof. Galligani, che avevo conosciuto durante la mia visita a Bologna nel 1981, si prende a cuore la mia causa e nel 1986 si reca diverse volte al MURST e all'ambasciata turca a Roma per cercare di risolvere la questione della reciprocità. Quando la burocrazia fallisce, Galligani si improvvisa "investigatore privato" e si mette alla ricerca di casi che potrebbero essere utili come precedenti. Verso la fine del 1986, trova il caso di Giacomo Saban, allora Professore ordinario di Geometria presso la Sapienza di Roma, che aveva insegnato Geometria presso l'Università di Istanbul dal 1952 al 1979.

Saban nacque a Istanbul nel 1926 da una famiglia italiana di discendenza ebraica sefardita, i cui antenati erano stati espulsi dalla Spagna nel XV secolo e accolti dagli Ottomani (Fig. 3). Nel gennaio del 1987, il concorso nazionale si sbloccò. Iniziarono subito i valzer per le chiamate, con vari Dipartimenti, tra cui Roma, Salerno, Bari e Bologna, che mi

**Poiché nel 1985, non avevo ancora ottenuto la cittadinanza americana, avevo presentato la domanda al concorso in Italia con sola la cittadinanza turca.

Figura 3. Giacomo Saban con i genitori e la sorellina negli anni '30.

corteggiarono. Tra questi, per me la scelta di Bologna fu abbastanza facile. Nel novembre 1987, ricevetti ufficialmente la chiamata dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna per ricoprire il ruolo di Professore di prima fascia del Settore Scientifico Disciplinare Informatica, una novità assoluta per Bologna.

3. Capitolo italiano

Nel dicembre del 1987, giunsi a Bologna pochi giorni prima di Natale, portando con me due valigie di effetti personali e una workstation *Sun SparcStation 2*, una delle prime workstation scientifiche, prodotta dalla *Sun Microsystems* fondata nel 1982 dal mio compagno di Berkeley Bill Joy assieme a Scott McNealy, Andy Bechtolsheim, e Vinod Khosla. La workstation insieme a un disco esterno (Fig. 4) mi erano stati regalati da Bill Joy mentre ero ancora alla Cornell University.

Figura 4. Sun SparcStation 2 e il suo disco esterno "shoebox" da 71Mb.

Una volta installata la workstation Sun nel mio studio di Porta San Donato, iniziai il lungo percorso per realizzare il mio obiettivo di essere "connesso al mondo", una possibilità che avevo perso quando avevo lasciato la Cornell. La prima cosa che feci fu convincere il Dipartimento ad acquisire un modem *Telebit TrailBlazer* (Fig. 5) e collegarlo alla

Figura 5. Modem Telebit TrailBlazer.

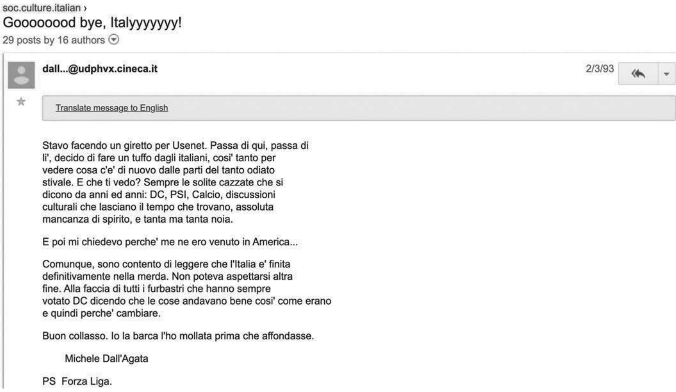
mia workstation. Il modem TrailBlazer era costoso e ingombrante, ma allo stesso tempo rivoluzionario, poiché permetteva di trasferire informazioni a una velocità quattro volte superiore (9600 bps contro 2400 bps) rispetto ai modem precedenti.

Nel 1989, il Dipartimento di Matematica divenne il nodo "ubdm" della rete nota come *Usenet*. Usenet era una rete interessante perché non era basata su server o amministratori centralizzati. Infatti, aveva un'architettura cosiddetta *peer-to-peer*, in cui tutti i nodi hanno le stesse funzionalità e responsabilità. Nato nel 1980 come una versione "povera" di ARPAnet, Usenet utilizzava il comando *uucp* (unix-to-unix copy) come trasporto per la posta elettronica e il trasferimento dei file. Ogni notte alle ore 03.00, la mia Sun-2 chiamava il nodo "ugdist" dell'Università di Genova per scambiare messaggi di posta elettronica e la *netnews*, una delle primissime reti sociali dove persone con interessi comuni su vari argomenti potevano aggregarsi nei *newsgroup*. I newsgroup di Usenet erano organizzati in *thread*, in modo simile alle attuali *group chat* o agli argomenti con *hashtag* di Twitter. Molti termini del nostro linguaggio attuale di rete, come *FAQ*, *spam*, *trolling*, *flame wars*, hanno origine proprio in Usenet.

A differenza di Twitter o delle group chat, i newsgroup di Usenet venivano creati attraverso un processo democratico tra gli utenti e avevano una struttura gerarchica. Mentre gli otto gruppi di primo livello (i cosiddetti "Big Eight": *comp.∗*, *humanities.∗*, *misc.∗*, *news.∗*, *rec.∗*, *sci.∗*, *soc.∗*, *talk.∗*) erano fortemente regolamentati, un nono gruppo chiamato *alt.∗* era "anarchico" nel senso che poteva essere esteso liberamente dagli utenti. Di conseguenza, il newsgroup *alt.binaries* divenne presto il più popolare per il volume di traffico, principalmente costituito da immagini pornografiche.

Occasionalmente, alcuni newsgroup venivano infiltrati da individui con cattive intenzioni, con lo scopo di fare *trolling*, ovvero scrivere commenti dispregiativi per pura provocazione (Fig. 6).

Ma Usenet non era solo un luogo di trolling e scambi aspri: c'erano anche gruppi di grande coesione e amicizia. Uno di questi era *rec.bicycles.racing*, dove si discuteva della mia passione – il ciclismo – e dove avevo raggiunto una certa fama. I miei post con i risultati delle gare europee di ciclismo professionale erano molto apprezzati negli Stati Uniti in un'epoca in cui siti Web e canali televisivi tematici satellitari non esistevano ancora. La mia fama era anche dovuta al fatto di aver vinto più volte un concorso organizzato da un appassionato cicloamatore americano di nome Bruce Hildenbrand (Fig. 7). Lo scopo del concorso era quello di predire i risultati delle classiche ciclistiche di primavera, come la Milano-Sanremo, il Giro delle Fiandre, la Parigi-Roubaix e la Liegi-Bastogne-Liegi.


soc.culture.italian ›
Goooooood bye, Italyyyyyyy!
29 posts by 16 authors

dall...@udphvx.cineca.it 2/3/93

Translate message to English

Stavo facendo un giretto per Usenet. Passa di qui, passa di
li', decido di fare un tuffo dagli italiani, cosi' tanto per
vedere cosa c'e' di nuovo dalle parti del tanto odiato
stivale. E che ti vedo? Sempre le solite cazzate che si
dicono da anni ed anni: DC, PSI, Calcio, discussioni
culturali che lasciano il tempo che trovano, assoluta
mancanza di spirito, e tanta ma tanta noia.

E poi mi chiedevo perche' me ne ero venuto in America...

Comunque, sono contento di leggere che l'Italia e' finita
definitivamente nella merda. Non poteva aspettarsi altra
fine. Alla faccia di tutti i furbastri che hanno sempre
votato DC dicendo che le cose andavano bene cosi' come erano
e quindi perche' cambiare.

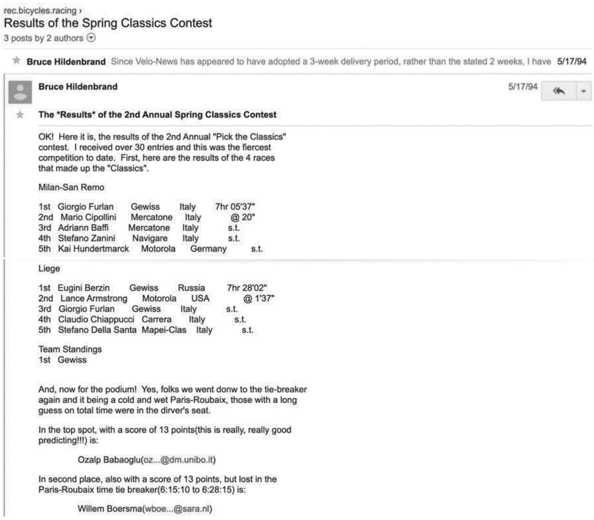
Buon collasso. Io la barca l'ho mollata prima che affondasse.

Michele Dall'Agata

PS Forza Liga.

Figura 6. Trolling del newsgroup soc.culture.italian.

Verso la fine del 1988, il Dipartimento di Matematica aveva acquisito diversi dispositivi di calcolo e comunicazione da affiancare alla mia vecchia Sun-2. Gli uffici dei docenti erano stati cablati con *Ethernet sottile*, così come la sala lettura della biblioteca e l'aula Enriques, dove avevo allestito un piccolo laboratorio didattico di programmazione per il mio corso *Teoria e Applicazioni delle Macchine Calcolatrici* (TAMC) con computer Macintosh, collegati tramite AppleTalk.


rec.bicycles.racing ›
Results of the Spring Classics Contest
3 posts by 2 authors

Bruce Hildenbrand Since Velo-News has appeared to have adopted a 3-week delivery period, rather than the stated 2 weeks, I have 5/17/94

Bruce Hildenbrand 5/17/94

The *Results* of the 2nd Annual Spring Classics Contest

OK! Here it is, the results of the 2nd Annual "Pick the Classics"
contest. I received over 30 entries and this was the fiercest
competition to date. First, here are the results of the 4 races
that made up the "Classics".

Milan-San Remo

1st	Giorgio Furlan	Gewiss	Italy	7hr 05'37"
2nd	Mario Cipollini	Mercatone	Italy	@ 20"
3rd	Adriann Baffi	Mercatone	Italy	s.t.
4th	Stefano Zanini	Navigare	Italy	s.t.
5th	Kai Hundertmarck	Motorola	Germany	s.t.

Liege

1st	Eugini Berzin	Gewiss	Russia	7hr 28'02"
2nd	Lance Armstrong	Motorola	USA	@ 1'37"
3rd	Giorgio Furlan	Gewiss	Italy	s.t.
4th	Claudio Chiappucci	Carrera	Italy	s.t.
5th	Stefano Della Santa	Mapei-Clas	Italy	s.t.

Team Standings
1st Gewiss

And, now for the podium! Yes, folks we went donw to the tie-breaker
again and it being a cold and wet Paris-Roubaix, those with a long
guess on total time were in the dirver's seat.

In the top spot, with a score of 13 points(this is really, really good
predicting!!!) is:

Ozalp Babaoglu(oz...@dm.unibo.it)

In second place, also with a score of 13 points, but lost in the
Paris-Roubaix time tie breaker(6:15:10 to 6:28:15) is:

Willem Boersma(wboe...@sara.nl)

Figura 7. L'edizione 1994 del concorso "Spring Classics Contest" dove la gara si è risolta sul filo di lana tra me e l'olandese Willem Boersma sul tempo del vincitore della Parigi-Roubaix.

Per connettersi a Internet, un computer doveva essere identificato da un indirizzo IP "ufficiale" assegnato da un'autorità, che all'epoca era chiamata "HOSTMASTER" presso lo *Stanford Research Institute* in California (Fig. 8).

```
From: "<HOSTMASTER@sri-nic.arpa>" <HOSTMASTER@SRI-NIC.ARPA> Mon, 15 Aug 88 18:47:06 EDT
Received: from SRI-NIC.ARPA by gvax.cs.cornell.edu (5.54/4.30) id AA04381; Mon, 15 Aug 88 18:46:38 EDT
<12422728680.33.SUE@SRI-NIC.ARPA>
Sender: <SUE@SRI-NIC.ARPA>
To: ozalp@gvax.cs.cornell.edu
Cc: "<hostmaster@sri-nic.arpa>" <hostmaster@SRI-NIC.ARPA>
Subject:  Net Num Assignments

Ozalp,

The new class and network numbers are:

BOLOGNA-MATH-CS, Class B, #130.136
BOLOGNA-EXT1,    Class C, #192.12.47
BOLOGNA-EXT2,    Class C, #192.12.77

It is suggested that host number zero in any network be reserved (not
used), and the host address of all ones (255 in class C networks) in any
network be used to indicate a broadcast datagram.

Note that for networks connected to the ARPA-Internet or the
DDN-Internet the gateway must be either a core gateway supplied and
operated by BBN, or a gateway of another Autonomous System.  If this
gateway is not a core gateway, then some gateway in this gateway's
Autonomous System must exchange routing information with some core
gateway via EGP.

NOTE: Separate authorization is required to connect any independently
assigned network numbers to the ARPA-Internet or the DDN-Internet.

Thanks again for your cooperation!
Sue Romano
```

Figura 8. Mail di risposta del HOSTMASTER dell'agosto 1988 alla mia richiesta di un indirizzo classe B e due indirizzi classe C da utilizzare da parte del Dipartimento di Matematica.

Nel 1989 UniBO aveva un pot-pourri di collegamenti con diverse reti esterne, tra cui Usenet, Bitnet, DECNet (molto utilizzata dai Fisici), SNA e X.25. Due calcolatori IBM, uno del CINECA e l'altro del CNR/CNUCE di Pisa, erano collegati tramite una rete proprietaria SNA della IBM, mentre il Dipartimento di Matematica era collegato al CINECA tramite una linea seriale dedicata a 19200 bps fornita dalla SIP, l'unica azienda italiana di telecomunicazioni in quell'epoca. La linea SIP, procurata dal Prof. Galligani per suo gruppo di analisi numerica, era collegata a uno *statistical multiplexor*, un concentratore di smistamento statistico, posizionato presso il Dipartimento di Matematica (Fig. 9).

COLLEGAMENTI CONCENTRATORE CINECA
(2 Aprile 1989)

CANALE	VELOCITÀ	CAVO	DESTINAZIONE
1	9600	TD03D	VaxStation Serial Port (SLIP)
2	2400	TD04D	SpiderPort Terminal Server (Line 2)
3	2400	TD10D	SpiderPort Terminal Server (Line 3)
4	2400	TD11D	SpiderPort Terminal Server (Line 4)
5	1200	—	—
6	1200	nero	Mineralogia (mini-modem)
7	300	TD07D	Studio Prof. De Salvo (mini-modem)
8	2400	nero	Analisi Numerica
9	300	—	—
10	2400	TDN08D	Stampante
11	1200	TD17D	Analisi Numerica
12	1200	TD06D	Geologia (mini-modem)
13	1200	TDN10D	Terminale TeleVideo (diretto)
14	1200	TDN09D	Terminale TeleVideo (diretto)
15	1200	TDN07D	PC NCR (diretto)
16	1200	TD18D	Analisi Numerica

Figura 9. Configurazione del concentratore statistico per servire il bacino di Porta San Donato. La linea da me usata per collegare i due MicroVAX era quella del canale 1.

Dal concentratore "rubai" uno dei 16 canali per collegare due computer DEC MicroVAX 2000, uno al CINECA e l'altro posizionato nell'aula Enriques a Matematica. Le due macchine scambiavano dati tramite il protocollo SLIP, ovvero TCP/IP su linee seriali, a una velocità di 9600 bps.

Il primo nodo Internet italiano era nato nel 1986 presso il CNUCE di Pisa, collegato agli Stati Uniti tramite un canale satellitare. Nell'aprile del 1989, Matematica diventa il primo dipartimento dell'Università di Bologna a collegarsi a Internet seguendo un percorso lungo e tortuoso: il primo passo fu tra i due MicroVAX, uno al CINECA e uno a Matematica, tramite il protocollo SLIP che utilizzava TCP/IP su linee seriali; il secondo passo fu tra i due mainframe IBM del CINECA e del CNUCE attraverso un tunnel IP su SNA; il terzo passo fu un canale satellitare tra Frascati e Roaring Creek, Pennsylvania. Incredibilmente, tutto funzionò e nell'aprile del 1989, UniBO si aprì al mondo! La connessione era lenta, con un ritardo di oltre 600 ms, principalmente dovuto ai tempi di comunicazione del collegamento satellitare (Fig. 10).

```
carmen% ping gvax.cs.cornell.edu
PING gvax.cs.cornell.edu (128.84.96.12): 56 data bytes
64 bytes from 128.84.96.12: icmp_seq=0 ttl=51 time=624.299 ms
64 bytes from 128.84.96.12: icmp_seq=1 ttl=51 time=633.984 ms
64 bytes from 128.84.96.12: icmp_seq=2 ttl=51 time=645.431 ms
64 bytes from 128.84.96.12: icmp_seq=3 ttl=51 time=624.499 ms
64 bytes from 128.84.96.12: icmp_seq=4 ttl=51 time=673.724 ms
64 bytes from 128.84.96.12: icmp_seq=5 ttl=51 time=615.425 ms
```

Figura 10. "Ping" del nodo "gvax" a Cornell dal nodo "carmen" (MicroVAX) del Dipartimento di Matematica.

L'estate del 1989 fu dedicata a completare la presenza del Dipartimento di Matematica su Internet, configurando i *nameserver* per tradurre nomi simbolici in indirizzi numerici IP. Per garantire un'alta disponibilità, i nameserver erano configurati con ridondanza: un server primario era collocato presso il Dipartimento di Matematica, mentre un server secondario era posizionato presso la Cornell University negli Stati Uniti, grazie ai miei rapporti privilegiati con il mio vecchio dipartimento. Nel 1989 registrai i domini *unibo.it*, *dm.unibo.it* e *cs.unibo.it* presso il CNUCE, che era diventato il "*Registrar*" per i domini italiani. Tra i vari servizi offerti dalla rete, la posta elettronica è sicuramente uno dei più importanti. Presto fummo in grado di comunicare con il resto del mondo tramite posta elettronica con indirizzi dai domini *dm.unibo.it* (Matematica) e *cs.unibo.it* (Informatica).

La possibilità di comunicare attraverso la posta elettronica è stato un punto di svolta nella mia attività di ricerca e professionale. Come membro dei comitati editoriali delle riviste *ACM Transactions on Computer Systems* e *Springer-Verlag Distributed Computing*, a questo punto ero in grado di svolgere l'attività delle recensioni degli articoli sottomessi in formato digitale, eliminando l'uso di carta stampata e della posta tradizionale con i relativi ritardi.

Nel frattempo, il protocollo TCP/IP stava diventando sempre più diffuso in tutta Europa e nel maggio del 1989 era stata creata l'organizzazione pan-Europea *Réseaux IP Européens* (RIPE) per coordinare l'interconnessione delle reti nazionali. Nello stesso tempo, enti governativi e compagnie di telecomunicazioni facevano pressione per l'adozione dello standard ISO-OSI, a differenza della comunità accademica e scientifica che invece favoriva il protocollo TCP/IP per facilitare l'interoperabilità con le università e i centri di ricerca degli Stati Uniti.

Nel dicembre 1989 feci un'altra richiesta al HOSTMASTER per un indirizzo IP di classe B da utilizzare al livello di Ateneo e destinato a diventare l'attuale ALMANET (Fig. 11).

```
From: "<HOSTMASTER@nic.ddn.mil>" <HOSTMASTER@NIC.DDN.MIL>  Tue, 09 Jan 90 14:56:01 EDT
Received: from carmen.dm.unibo.it by tosca.dm.unibo.it Tue, 9 Jan 90 21:57:35 +0100
Sender: <BELMONTE@NIC.DDN.MIL>
To: ozalp%dm.unibo.it@cunyvm.cuny.edu Cc: hostmaster@nic.ddn.mil
Subject: new net number


The new class and network number for BOLOGNA-ALMA-NET is:

Class B, #137.204

It is suggested that host number zero in any network be reserved (not
used), and the host address of all ones (255 in class C networks) in any
network be used to indicate a broadcast datagram.

Note that for networks connected to the ARPA-Internet or the
DDN-Internet the gateway must be either a core gateway supplied and
operated by BBN, or a gateway of another Autonomous System.  If this
gateway is not a core gateway, then some gateway in this gateway's
Autonomous System must exchange routing information with some core
gateway via EGP.

NOTE: Separate authorization is required to connect any independently
assigned network numbers to the ARPA-Internet or the DDN-Internet.

Thanks again for your cooperation!
Michelle Belmonte
```

Figura 11. Risposta del HOSTMASTER alla mia richiesta che assegna l'indirizzo 137.204 a BOLOGNA-ALMA-NET che è ancora in uso nel nostro Ateneo.

Nello stesso tempo, l'uso del protocollo TCP/IP si è diffuso anche presso UniBO, oltre che nel Dipartimento di Matematica, anche nei dipartimenti di Fisica, Astronomia e Ingegneria. Con l'arrivo di una rete metropolitana fornita da *Telecom* e in collaborazione con il collega Renzo Davoli, nell'aprile del 1990 proponemmo una rete interdipartimentale che si sarebbe poi trasformata nell'*Intranet dell'Ateneo* (Fig. 12).

```
From: BOMAT::renzo  9-APR-1990 14:38:42.71
To:   ingbo1::system
Subj:    PROPOSTA ACQUISIZIONE ROUTER

Egr. sig D'Angelantonio
per cortesia diffonda ai componenti la commissione di Almanet il messaggio seguente. GRAZIE!
        renzo davoli
----
PROPOSTA DI INSTALLAZIONE DI UN ROUTER PRESSO IL DIPARTIMENTO DI
FISICA PER L'INTERCONNESSIONE DI ALMANET CON LA RETE DEL CNAF.

CINECA===========================CNAF
    |\                           |
    | \                          |
    |  \                         |
    |   \                        |   2Mbps metropolitan backbone
    ?    ?   Matem.              |
    |     \    |                 |
    |      \   |                 |
    |       \  |          FISICA|
Ingegn.-?-Astronom.--------------**<-attualmente le due linee a fisica sono scollegate.

MARCA CISCO cabinet: CGS #2 interfaccie ethernet
costo approssimativo 22Mlit. (18520Klit+IVA)
Protocolli gestiti: TCP/IP (RIP EGP EGRP )
            DecNet (level 1 and/or level 2)
            ISO-CLNS (ES-IS)
            XNS
            AppleTalk (RTMP NBP EP ATP ZIP)

                               I promotori
                               Babaoglu-Davoli
```

Figura 12. La mail di Davoli con la nostra proposta di collegamento tra i Dipartimenti di Matematica, Fisica, Astronomia, CNAF e CINECA.

A livello nazionale, invece, nasce il *Gruppo per l'Armonizzazione della Rete della Ricerca* (GARR) per coordinare la crescita di Internet in Italia.

Non passa molto tempo prima che arrivino vari tipi di attacchi informatici alla nostra rete. Nel febbraio 1993 un controllo quotidiano dell'integrità del sistema di file rivela numerosi errori, segnalando l'effettiva presenza di un'intrusione. Inoltrai subito una denuncia dell'avvenuto al *Computer Emergency Response Team* (CERT) degli Stati Uniti. Attraverso un'analisi forense, identificammo l'origine dell'attacco come proveniente da un istituto del CNR a Milano dove venne identificata anche la persona responsabile. Poiché eventi di questo tipo diventarono sempre più frequenti, nel febbraio del 1994 nacque il CERT-IT.

Nel 1992 lanciai la collana di rapporti tecnici sotto l'acronimo "UBLCS" (*University of Bologna Laboratory of Computer Science*), poiché all'epoca non esisteva ancora un dipartimento di informatica. Per i colleghi, la collana UBLCS diventa un mezzo veloce per diffondere i risultati delle loro ricerche prima della pubblicazione negli atti di conferenze o nelle riviste. Questi rapporti potevano essere scaricati in formato *Postscript* tramite il protocollo FTP. Creato da Adobe, il Postscript era un formato di scambio di documenti prima che il *pdf* diventasse il formato *de facto* standard per versioni digitali del materiale di stampa. Oggi è comune diffondere risultati di ricerca in forma elettronica attraverso diversi archivi organizzati per discipline, come *arXiv* per l'informatica.

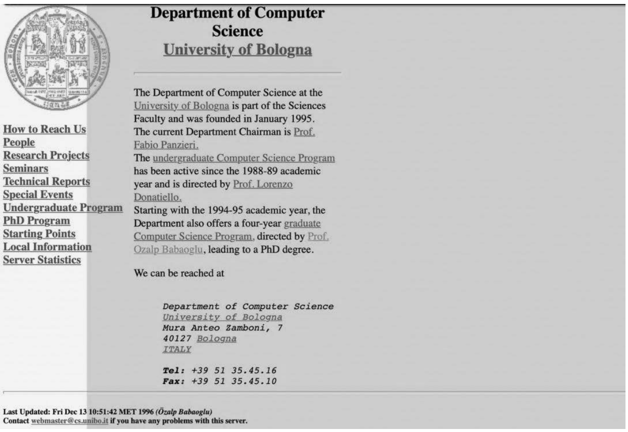


Figura 13. Homepage del neocostituito *Dipartimento di Scienze dell'Informazione* come apparve nel dicembre 1996. Il sito *www.cs.unibo.it,* in lingua inglese, programmato manualmente da me nella veste di "webmaster", divenne la prima presenza di UniBO sul nascente World Wide Web.

Nel 1989 Berners-Lee creò il *World Wide Web* al CERN e lo rese pubblico nel 1991. Prima della nascita del World Wide Web, Internet era esclusivamente testuale e i servizi erano limitati alla posta elettronica, alle liste di distribuzione, al trasferimento di file, alle netnews e alle bacheche elettroniche. I primi siti Web italiani (come quelli dell'*Università di Pisa* e del *Centro di Ricerca, Sviluppo e Studi Superiori* (CRS4) in Sardegna) nacquero nel

1993. Nel 1995 nacque il *Dipartimento di Scienze dell'Informazione* presso l'Università di Bologna e si presentò subito sul World Wide Web con la sua homepage (Fig. 13). L'anno dopo UniBO creò suo primo sito Web (Fig. 14).

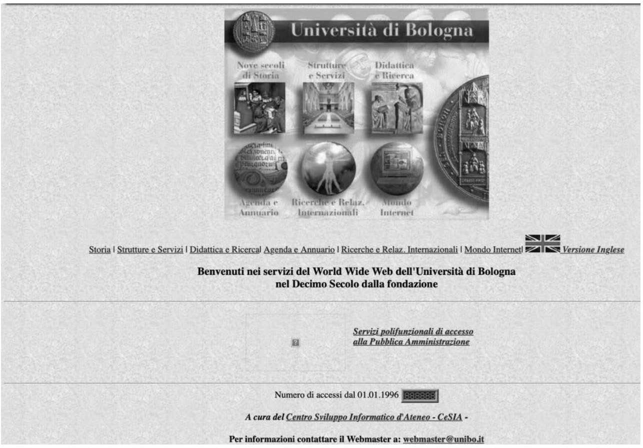


Figura 14. La homepage del Università di Bologna come apparve nel gennaio 1997 all'URL www.unibo.it.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare, per primo, Ilio Galligani per suo ruolo fondamentale nel favorire la mia presenza in Italia e all'Università di Bologna, poi Luigi Cerofolini, un pioniere che ha saputo apprezzare il sistema Unix molto prima degli altri, e altri colleghi del Dipartimento di Matematica nelle persone di Cesare Parenti, Mirella Manaresi, Sandro Graffi e Antonio Bove che mi hanno sostenuto durante miei primi anni a Bologna. Tra i colleghi del Dipartimento di Fisica, ringrazio Sergio Focardi, preside della Facoltà di Scienze al mio arrivo in Ateneo, assieme a Paolo Capiluppi, Federico Palmonari e Giorgio Giacomelli. Quando sono arrivato a Bologna, ho trovato un gruppo di giovani, tra cui Renzo Davoli, Sandro Amoroso e Lorenzo Alvisi, neolaureati in Matematica e Fisica, pieni di entusiasmo ed energia. Renzo in particolare, è stato mio complice in molte delle vicende che ho raccontato e mi ha dato una mano preziosa con la sua straordinaria capacità tecnica. Infine, vorrei ringraziare i tecnici del CINECA a Bologna, Joy Marino del DIST di Genova, Blasco Bonito e Marco Sommani del CNUCE di Pisa.

Bibliografia

[1] Babaoglu, Ozalp, *Hardware implementation of the legal move generation and relative ordering functions for the game of chess*, Master of Science Thesis. University of California, Berkeley, 1977.

[2] Babaoglu, Ozalp e William Joy, “Converting a swap-based system to do paging in an architecture lacking page-referenced bits”, *Proceedings of the Eighth Symposium on Operating System Principles, Asilomar, Pacific Grove, California, December 1981*, Association for Computer Machinery, New York, NY, 1989, pp. 78-86.

[3] Babaoglu, Ozalp, *Virtual Storage Management in the Absence of Reference Bits*, PhD Thesis. University of California, Berkeley, 1981.

Metodi probabilistici in Analisi Numerica: un contributo pionieristico di Gianfranco Cimmino

*Michele Benzi**, *Nicola Guglielmi***

A partire dalla metà degil anni Sessanta, Gianfranco Cimmino (1908-1989) si interessò all'uso di metodi probabilistici per la risoluzione numerica di sistemi di equazioni algebriche lineari. All'epoca, e per molti anni, queste idee rimasero largamente al di fuori delle principali correnti di ricerca in analisi numerica e furono sostanzialmente ignorate dalla comunità scientifica. In anni recenti l'interesse nei confronti dei metodi numerici probabilistici è cresciuto enormemente, portando alla nascita di un nuovo settore di ricerca, la *randomized numerical linear algebra*. In questo contributo descriviamo le idee di Cimmino in tale ambito di ricerca mettendole a confronto con alcuni degli sviluppi più recenti.

1. Introduzione

Gianfranco Cimmino (1908-1989) è stato un eminente matematico italiano che ha apportato contributi di rilievo a diversi settori dell'Analisi Matematica e in particolare alla teoria delle equazioni alle derivate parziali lineari di tipo ellittico. Tuttavia Cimmino è oggi ricordato soprattutto per un ingegnoso ed elegante metodo iterativo per la risoluzione dei sistemi di equazioni lineari algebriche, pubblicato nel 1938 [10]. A lungo trascurato, a partire dagli anni Settanta questo metodo è stato oggetto di numerosi studi che ne hanno proposto svariate estensioni, modifiche, e applicazioni in diversi settori tecnico-scientifici, per esempio nella ricostruzione di immagini mediche (tomografia computazionale) e nella pianificazione (dosaggio) della radioterapia per pazienti oncologici [9, 28, 37, 50, 51, 52]. La storia di questo metodo e la sua collocazione nel contesto della ricerca matematica dell'epoca, inclusa una breve descrizione dell'Istituto Nazionale

*Classe di Scienze, Scuola Normale Superiore, Pisa.
E-mail: michele.benzi@sns.it
**Division of Mathematics, Gran Sasso Science Institute, L'Aquila.
E-mail: nicola.guglielmi@gssi.it

per le Applicazioni del Calcolo, fondato e diretto da Mauro Picone, dove Cimmino sviluppò il suo metodo, è stata raccontata in un precedente lavoro del primo autore [1, 2] (si veda anche [6]). Molti anni dopo la pubblicazione del 1938, Cimmino ritornò sull'argomento in alcuni brevi lavori [11, 12] nei quali propose una versione probabilistica (*randomizzata*, diremmo oggi) del suo metodo, che – spinta all'estremo – porta a un metodo di tipo Monte Carlo per l'approssimazione delle soluzioni del sistema, ed in ultimo a delle espressioni esplicite, in termini di integrali sferici, delle soluzioni [13]. Per quanto l'idea di usare metodi di tipo probabilistico per la soluzione di sistemi lineari non fosse nuova, il metodo proposto da Cimmino è alquanto diverso dalle tecniche introdotte precedentemente da altri autori, basate prevalentemente sull'uso di passeggiate aleatorie. Cionondimeno, anche questo contributo di Cimmino passò essenzialmente inosservato e non siamo a conoscenza di lavori nei quali il suo approccio probabilistico sia stato effettivamente implementato e utilizzato per la soluzione di problemi concreti. In questo lavoro, dopo avere fornito alcune succinte informazioni di carattere biografico su Cimmino e un breve resoconto del metodo (iterativo, deterministico) del 1938, forniamo una descrizione dell'approccio probabilistico proposto da Cimmino e presentiamo i risultati di alcuni esperimenti numerici il cui scopo è di offrire una valutazione, per quanto sommaria, delle prestazioni del metodo. Mettiamo infine a confronto le idee pionieristiche di Cimmino sull'uso della randomizzazione con alcune delle tendenze di maggiore impatto emerse in anni recenti.

2. Gianfranco Cimmino: note biografiche

Gianfranco Luigi Giuseppe Cimmino nacque a Napoli il 12 marzo 1908 e morì a Bologna il 30 maggio 1989. Suo padre, Francesco, fu un apprezzato storico, orientalista e poeta, amico di Benedetto Croce, e professore di Sanscrito all'Università di Napoli dal 1914 al 1935. La madre, Olimpia, originaria di Novara, apparteneva alla nobile famiglia dei Gibellini Tornielli Boniperti.

Cimmino si laureò in matematica a Napoli nel 1927, appena diciannovenne, avendo Mauro Picone come relatore. Dopo un periodo di studio all'estero (a Monaco di Baviera e a Gottinga) e di assistentato a Napoli presso la cattedra di Geometria Analitica e dopo avere conseguito, nel 1931, la libera docenza, Cimmino fu titolare per alcuni anni dei corsi di Analisi Superiore e di Geometria Analitica all'Università di Napoli fino a che, nel 1938, non conseguì la cattedra di Analisi Matematica all'Università di Cagliari. L'anno successivo Cimmino si trasferì all'Università di Bologna, dove rimase per il resto della sua vita. Nel corso della sua carriera Cimmino ottenne svariati premi e riconoscimenti e ricoprì diversi incarichi, tra i quali quello di preside della Facoltà di Scienze dell'Università di Bologna. Ebbe inoltre ruoli direttivi in seno all'Unione Matematica Italiana e all'Istituto Nazionale di Alta Matematica, e nel 1969 fu eletto Socio dell'Accademia Nazionale dei Lincei [40, 41, 46].

L'attività scientifica di Cimmino copre un arco di circa 60 anni. È interessante notare che la sua produzione scientifica, oltre ad alcuni trattati di carattere prevalentemente didattico, consiste esclusivamente di memorie e note pubblicate a nome singolo. Oltre alla produzione strettamente scientifica, Cimmino fu anche autore di alcuni lavori di taglio divulgativo e di un saggio su "Dante e la Matematica". Egli redasse inoltre diverse centinaia di recensioni per il *Zentralblatt für Mathematik*, prevalentemente in tedesco.

I lavori di Cimmino riguardano in primo luogo la teoria delle equazioni alle derivate parziali lineari, settore nel quale ottenne risultati di rilievo [41]. Studiò inoltre i problemi ai limiti per le equazioni differenziali ordinarie, i sistemi di infinite equazioni differenziali e di equazioni integrali (di Fredholm) in infinite incognite, e diede contributi originali al calcolo delle variazioni e alla teoria delle applicazioni conformi e quasi-conformi. Altri lavori riguardano aspetti della teoria degli spazi vettoriali topologici (soprattutto relativi alla dualità) e delle (ultra-)distribuzioni [16]. A fianco di questi lavori, Cimmino pubblicò anche 5-6 note dedicate al calcolo numerico, in particolare alla risoluzione dei sistemi di equazioni algebriche lineari. Il più importante di questi lavori è senz'altro [10], nota che Cimmino scrisse dietro insistente richiesta da parte di Mauro Picone, nella quale Cimmino propose il metodo che sarebbe diventato universalmente noto come *Cimmino's method*. Benchè l'articolo veda la luce nel 1938, l'idea del metodo risale a diversi anni prima, quando Cimmino era tra i collaboratori dell'INAC (Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo), fondato e diretto dallo stesso Picone. Per maggiori informazioni su Picone e sull'INAC, rimandiamo gli interessati ai lavori [4, 38].

3. Il metodo di Cimmino del 1938

In [10], Cimmino considera un sistema di equazioni lineari algebriche $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dove A è una matrice reale $n \times n$, che inizialmente suppone essere non singolare, e $\mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Se $\mathbf{a}_i^T = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ denota la riga i-esima di A, la soluzione $\mathbf{x}_* = A^{-1}\mathbf{b}$ corrisponde all'unico punto in comune agli n iperpiani descritti dalle equazioni del sistema,

$$\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x} \rangle = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Data un'approssimazione iniziale arbitraria $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, Cimmino considera, per ciascun $i = 1, \ldots, n$, la riflessione (immagine speculare) $\mathbf{x}_i^{(0)}$ di $\mathbf{x}^{(0)}$ rispetto all'iperpiano (1):

$$\mathbf{x}_i^{(0)} = \mathbf{x}^{(0)} + 2\,\frac{b_i - \langle \mathbf{a}_i, \mathbf{x}^{(0)} \rangle}{\|\mathbf{a}_i\|^2}\,\mathbf{a}_i \tag{2}$$

(qui $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea in $\mathbb{R}^n$). Date ora n quantità positive $m_1, \ldots, m_n$, comunque scelte, Cimmino costruisce l'approssimazione $\mathbf{x}^{(1)}$ prendendo il baricentro del sistema formato dalle n masse m_i poste nei punti $\mathbf{x}_i^{(0)}$ dati da (2), per $i = 1, \ldots, n$. Cimmino osserva che il punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ e le sue riflessioni rispetto agli n iperpiani (1) giacciono tutti sull'ipersfera il cui centro è precisamente il punto comune agli n iperpiani, cioè la soluzione $\mathbf{x}_*$. Dal momento che il baricentro del sistema di masse $\{m_i\}_{i=1}^n$ deve essere necessariamente interno a tale ipersfera, ne consegue che la nuova approssimazione $\mathbf{x}^{(1)}$ approssima la soluzione meglio di $\mathbf{x}^{(0)}$:

$$\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}_*\| < \|\mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}_*\| \,.$$

A questo punto la procedura viene iterata a partire dalla nuova approssimazione $\mathbf{x}^{(1)}$, e così via. La successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ così costruita converge a $\mathbf{x}_* = A^{-1}\mathbf{b}$ per $k \to \infty$, come Cimmino dimostra facendo vedere che ad ogni passo l'errore di approssimazione è ridotto (almeno) di un fattore costante.

In forma matriciale, il metodo di Cimmino può essere scritto nel modo seguente:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{2}{\mu} A^T D^T D(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)})$$

($k = 0, 1, \ldots$), dove abbiamo posto

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{m_1}}{\|\mathbf{a}_1\|} & & & \\ & \frac{\sqrt{m_2}}{\|\mathbf{a}_2\|} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\sqrt{m_n}}{\|\mathbf{a}_n\|} \end{bmatrix} \tag{3}$$

e $\mu = \sum_{i=1}^n m_i$. In particolare, prendendo $m_i = \|\mathbf{a}_i\|^2$ si ottiene

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{2}{\mu} A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}),$$

che non è altro (in linguaggio moderno) che un caso particolare del *metodo di Richardson stazionario* [42] applicato al sistema delle equazioni normali $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$. Inoltre, se le righe di A sono normalizzate in modo che sia $m_i = \|\mathbf{a}_i\| = 1$ per $i = 1, 2, \ldots, n$, allora $\mu = n$ e il metodo di Cimmino coincide con il *metodo di Jacobi sotto-rilassato* con una speciale scelta del parametro di rilassamento, che garantisce automaticamente la convergenza del metodo. Sottolineiamo che queste sono interpretazioni *a posteriori* del metodo di Cimmino, che non sembra essere stato a conoscenza dei metodi di Richardson [42] e di Jacobi [31] (l'articolo [10] non contiene alcun riferimento bibliografico).

Nel suo articolo Cimmino dimostra poi che la successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ converge a una soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ anche quando la matrice A è singolare, purché naturalmente il sistema sia compatibile, sotto la sola condizione che A abbia rango strettamente maggiore di 1; in questo caso il limite della successione sarà una delle infinite soluzioni del sistema, che dipenderà in generale da $\mathbf{x}^{(0)}$. Inoltre egli osserva che il metodo converge anche nel caso di sistemi incompatibili, sempre sotto la condizione che sia rank $(A) \geq 2$. È interessante notare che tornando sull'argomento molti anni dopo (in [11]), Cimmino scrisse:

> *Quest'ultima osservazione ha tuttavia il valore di una semplice curiosità, riuscendo essa evidentemente priva di utilità pratica.*

All'insaputa di Cimmino, in realtà questa proprietà del suo metodo ha notevole importanza pratica, in quanto ne garantisce l'applicabilità nel caso di problemi sovradeterminati come per esempio quelli provenienti dal metodo dei minimi quadrati o dalla discretizzazione di problemi mal posti.

Anche nel caso di sistemi singolari (ma compatibili), Cimmino ottiene una maggiorazione della norma dell'errore, dimostrando la convergenza lineare della successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$. Cimmino conclude il suo articolo mostrando come il suo metodo possa essere esteso, almeno formalmente, al caso di problemi infinito-dimensionali quali le equazioni integrali di Fredholm di I specie.

Il lavoro di Cimmino fu recensito per il *Zentralblatt für Mathematik* da Franz Rellich, ma rimase a lungo ignorato. Solo con l'avvento dei calcolatori elettronici digitali nel dopoguerra il metodo di Cimmino fece la sua comparsa in alcune importanti monografie di calcolo matriciale numerico quali quelle di Bodewig [5], Faddeev e Faddeva [20], Gastinel [23], e Householder [30] (si veda anche il rapporto di George Forsythe per il National Bureau of Standards [21]). Ciononostante, il metodo di Cimmino continuò ad incontrare pochissimo successo fino agli anni Settanta-Ottanta, quando cominciò finalmente ad essere utilizzato, per esempio nella soluzione di problemi discreti mal posti nell'ambito dell'elaborazione di immagini biomediche, per i quali risultò essere particolarmente attraente [37, 28]. Un altro fattore importante che portò alla rinascita di un forte interesse nei confronti del metodo di Cimmino fu la diffusione dei primi calcolatori paralleli. Dal momento che le riflessioni di un punto rispetto ad n iperpiani possono essere calcolate simultaneamente (indipendentemente una dall'altra), il metodo di Cimmino è naturalmente dotato di un elevato grado di parallelismo. Nello stesso periodo, inoltre, si diffusero tecniche di accelerazione (metodo di Chebyshev, metodo precondizionato dei gradienti coniugati) che si prestano molto bene all'utilizzo in tandem con il metodo di Cimmino. Nel corso degli anni sono apparse inoltre varianti non-lineari e infinito-dimensionali del metodo-base di Cimmino, al punto che ormai si parla di *Cimmino-type methods* [1]. Venendo agli ultimi venti anni, al metodo di Cimmino è dedicata una sezione dell'importante monografia di Saad [45] e sono ormai molti gli articoli e i trattati in cui si fa menzione del metodo (vedere [2]). Attualmente, l'idea di base del metodo continua a ispirare nuovi lavori nella letteratura specialistica (per esempio, [49]).

La storia del metodo di Cimmino presenta molti parallelismi con quella di un altro algoritmo iterativo per la soluzione di sistemi lineari la cui pubblicazione fu quasi contemporanea, dovuto al matematico polacco Stefan Kaczmarz [34]. In questo metodo, un punto iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ arbitrariamente scelto viene proiettato ortogonalmente sul primo degli

n iperpiani (1), il risultato $\mathbf{x}^{(0;1)}$ viene a sua volta proiettato ortogonalmente sul secondo iperpiano, risultando in un nuovo punto $\mathbf{x}^{(0;2)}$, e così via. Arrivati alla proiezione sull' n-esimo iperpiano, $\mathbf{x}^{(0;n)}$, si pone $\mathbf{x}^{(1)} := \mathbf{x}^{(0;n)}$ e il procedimento viene ripetuto partendo da $\mathbf{x}^{(1)}$. Si vede facilmente che per un sistema di n equazioni lineari in n incognite non singolare, la successione $\mathbf{x}^{(k)}$ converge necessariamente alla soluzione $\mathbf{x}_*$ per $k \to \infty$.

I metodi di Cimmino e Kaczmarz sono strettamente collegati. Quello di Cimmino si adatta meglio all'implementazione su elaboratori paralleli, mentre quello di Kaczmarz tipicamente converge un po' più rapidamente (è equivalente al metodo di Gauss-Seidel applicato al sistema $AA^T\mathbf{y} = \mathbf{b}$, con $\mathbf{x} = A^T\mathbf{y}$). Entrambi i metodi sono esempi di *row-action methods* [8] ed entrambi hanno buone proprietà di regolarizzazione quando sono applicati a problemi discreti mal posti. Un'altra cosa in comune tra i due metodi è il fatto di essere stati riscoperti (o reinventati) molte volte nel corso dei decenni. È possibile ottenere degli algoritmi ibridi combinando i due metodi: per esempio, le riflessioni del metodo di Cimmino possono essere sostituite da proiezioni ortogonali sugli iperpiani (1). Inoltre entrambi i metodi, come vedremo di seguito, possono essere accelerati mediante l'uso di tecniche di randomizzazione.

4. Le varianti probabilistiche

A partire dagli anni Sessanta, quasi trent'anni dopo la pubblicazione di [10], Cimmino rivisitò il problema della soluzione dei sistemi di equazioni lineari, proponendo alcune versioni probabilistiche del suo metodo [11, 12]. Cimmino era conscio del fatto che il suo metodo potesse convergere molto lentamente e si pose il problema della sua accelerazione. Il ragionamento di Cimmino è il seguente: data un'approssimazione iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$, ci sono due modi per migliorare tale approssimazione. Il primo consiste nel costruire un'approssimazione successiva $\mathbf{x}^{(1)}$ facendo la media pesata delle riflessioni (2) rispetto agli n iperpiani (1), per poi ripetere la procedura a partire dalla nuova approssimazione così ottenuta, e così via; questo è il metodo di Cimmino del 1938. Il secondo modo consiste invece nel costruire la nuova approssimazione come media pesata delle riflessioni di $\mathbf{x}^{(0)}$ non già (o non solo) rispetto agli n iperpiani (1), ma rispetto ad un gran numero di iperpiani passanti per lo stesso punto $\mathbf{x}_* = A^{-1}\mathbf{b}$. Questi iperpiani sono costruiti sostituendo (o aggiungendo) alle n equazioni (1) un certo numero $m \gg n$ di nuove equazioni che sono combinazioni lineari delle (1). L'elemento probabilistico consiste nel fatto che i coefficienti di queste combinazioni lineari sono scelti in modo casuale. Scegliendo $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, la formula che fornisce la k-esima coordinata del baricentro $\bar{\mathbf{x}}$ del sistema di masse è data da Cimmino nella forma seguente:

$$\bar{x}_k = \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\sum_{h=1}^{n} \gamma_{ih} a_{hk} \cdot \sum_{h=1}^{n} \gamma_{ih} b_h}{\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{n} \gamma_{ih} a_{hj}\right)^2}\,, \tag{4}$$

dove i coefficienti γ_{ih} sono numeri scelti a caso. Al crescere di m, il baricentro delle m masse collocate nei punti identificati dalle riflessioni dell'origine di $\mathbb{R}^n$ rispetto agli m iperpiani corrispondenti al nuovo sistema di equazioni lineari si troverà sempre più vicino, con elevata probabilità, al centro $\mathbf{x}_*$ dell'ipersfera su cui giacciono le m masse, essenzialmente a causa del fatto che le masse sono distribuite in maniera più o meno uniforme sull'ipersfera. Nel caso di una distribuzione uniforme di masse, Cimmino dimostra che, comunque dato un $\varepsilon > 0$, la probabilità che la soluzione approssimata così trovata disti da $\mathbf{x}_*$ meno di ε tende ad 1 per $m \to \infty$. Per i dettagli rimandiamo i lettori interessati a [25].

Non essendo però la distribuzione di masse perfettamente uniforme, non ci si può aspettare che le soluzioni corrispondenti a valori sempre maggiori di m convergano alla soluzione del sistema. Per questo Cimmino parla di "soluzione approssimata" $\bar{\mathbf{x}} \approx \mathbf{x}_*$ ottenuta per un dato valore di m. Se l'approssimazione così ottenuta non è sufficientemente accurata, si possono aggiungere nuove combinazioni lineari delle equazioni di partenza e continuare il procedimento (riflessioni seguite da un'operazione di media pesata) nella speranza di migliorare l'approssimazione. Conscio del fatto che dal punto di vista pratico non è conveniente prendere m troppo grande, Cimmino suggerisce, in alternativa, di applicare il suo metodo iterativo ad un sistema ampliato con m non troppo grande. In altre parole, si sostituisce il sistema originario con un sistema equivalente di $m = Mn$ equazioni (combinazioni lineari di quelle originali) con M fissato e non troppo grande, e si applica al nuovo sistema il metodo iterativo del 1938. La speranza è che il costo più elevato di ciascuna iterazione sia compensato dalla più rapida convergenza delle approssimazioni successive. Nelle sue brevi note Cimmino non tenta di stimare il valore ottimale di M, e non menziona alcuna forma di sperimentazione numerica del metodo (come in tutti i suoi lavori di carattere numerico, peraltro). A causa della scelta casuale dei coefficienti, Cimmino definisce il suo approccio un "metodo Monte Carlo".

In forma matriciale (non presente negli scritti di Cimmino), il metodo probabilistico può essere descritto come segue. Fissato un intero $M > 1$, sia $R \in \mathbb{R}^{Mn \times n}$ una matrice i cui elementi sono generati a caso rispetto ad una certa distribuzione, per es. uniformemente nell'intervallo $(0, 1)$. Posto $\hat{A} = R\,A$ e $\hat{\mathbf{b}} = R\,\mathbf{b}$, il nuovo sistema $R\,A\mathbf{x} = R\,\mathbf{b}$ ha con probabilità uguale ad 1 la stessa soluzione (supposta unica) del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, in quanto con probabilità uguale ad 1 la matrice R ha rango pieno (uguale ad n). Dopo avere normalizzato il sistema dividendo ciascuna delle equazioni per la norma euclidea della corrispondente riga di $\hat{A}$, il metodo di Cimmino randomizzato costruisce la successione di approssimazioni successive

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{2}{Mn}\hat{A}^T(\hat{\mathbf{b}} - \hat{A}\mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \ldots \tag{5}$$

dove $\mathbf{x}^{(0)}$ è un'approssimazione iniziale arbitraria. L'analisi in [10] applicata a questo sistema equivalente a quello dato assicura la convergenza della successione alla soluzione del sistema per $k \to \infty$. Osserviamo che per $k = 0$ e $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, la formula (5) si riduce precisamente alla (4), previa normalizzazione delle equazioni per la norma euclidea delle righe di RA ed essendo i numeri casuali γ_{ih} gli elementi di R.

È utile osservare che in pratica non è necessario, e nemmeno opportuno, formare tutta la matrice $\hat{A} = R\,A$ in modo esplicito: le norme delle righe di $\hat{A}$ possono essere calcolate in modo efficiente una riga per volta, e i prodotti matrice-vettore con la matrice $\hat{A}$ possono essere effettuati moltiplicando prima per A e poi per la matrice R. Questo è particolarmente importante se la matrice A è sparsa o ha una speciale struttura, per esempio di Toeplitz, proprietà che andrebbero perdute se $\hat{A}$ fosse formata esplicitamente. È anche evidente che in pratica è preferibile usare matrici aleatorie R *sparse*, con pochi elementi diversi da zero in ciascuna riga (in posizione anche queste casuali), allo scopo di ridurre il costo dei prodotti matrice-vettore.

È forse bene chiarire che lo schema iterativo (5) non è, strettamente parlando, un vero algoritmo randomizzato, in quanto la matrice R è fissata una volta per tutte all'inizio, prima di innescare la procedura iterativa (5), che è strettamente deterministica. D'altra parte, la "formula probabilistica" (4) può essere considerata a pieno diritto un algoritmo randomizzato, in quanto il valore di m non è fissato a priori ma può essere aumentato a piacere.

Osserviamo inoltre che una variante del metodo non prevede la sostituzione del sistema originario con il sistema $R\,A\,\mathbf{x} = R\,\mathbf{b}$, ma il suo ampliamento ottenuto aggiungendo alle n equazioni di $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ le Mn equazioni di $R\,A\,\mathbf{x} = R\,\mathbf{b}$, con successiva eventuale normalizzazione, con le ovvie modifiche allo schema iterativo (5). Anche per questa variante valgono considerazioni del tutto analoghe alle precedenti.

Infine, in [13] Cimmino considerò il caso in cui invece di un numero finito m di masse è data una distribuzione continua di massa su un'ipersfera il cui centro è la soluzione $\mathbf{x}_*$ del sistema dato, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Quando la distribuzione di massa è uniforme, il baricentro del sistema è precisamente $\mathbf{x}_*$, e il calcolo del baricentro (l'analogo della "formula probabilistica" (4)) fornisce un'espressione per la soluzione $\mathbf{x}_*$ in termini di integrali (iper-)sferici:

$$\mathbf{x}_* = n\,\frac{\displaystyle\int_\omega \|A^T\mathbf{x}\|^{-n-2}\langle \mathbf{x}, \mathbf{b}\rangle\, A^T\mathbf{x}\, d\omega}{\displaystyle\int_\omega \|A^T\mathbf{x}\|^{-n}\, d\omega} \tag{6}$$

dove $\omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| = 1\}$. In linea di principio è possibile stimare questi integrali (nel caso di n grande) con metodi di tipo Monte Carlo. Nelle parole di Cimmino, le formule forniscono un'alternativa alle classiche formule di Cramer (si vedano anche [14, 15]). È interessante notare che in [13] Cimmino scrisse:

> *I didn't try to check whether formulas (6) are already known, as it seems rather likely.*

In effetti, formule integrali per la soluzione di sistemi lineari algebrici sostanzialmente identiche a quella di Cimmino erano già state trovate da Jacobi nel 1834 [32].

5. Le tecniche di randomizzazione, oggi

Come già menzionato nell'Introduzione, Cimmino non fu il primo autore a proporre metodi probabilistici per la soluzione di sistemi di equazioni lineari. Nel loro celebre articolo del 1928 [17], Courant, Friedrichs e Lewy proposero di risolvere i sistemi di equazioni provenienti dall'approssimazione con differenze finite delle equazioni classiche della fisica matematica (in particolare l'equazione di Poisson e quella del calore) interpretandone la soluzione in termini di distribuzioni stazionarie di probabilità di passeggiate aleatorie (catene di Markov finite), i cui stati corrispondono ai nodi delle griglie utilizzate per discretizzare le equazioni alle derivate parziali di interesse. Nel caso dell'equazione di diffusione questo è un approccio particolarmente naturale, visto lo stretto legame tra tale equazione e la teoria dei processi stocastici.

Con l'avvento dei calcolatori elettronici queste tecniche furono implementate e applicate da diversi autori, si vedano per es. [18, 22] e il volume [29] per una prospettiva storica. Nel corso degli anni sono stati fatti molti tentativi per utilizzare tecniche stocastiche di tipo Monte Carlo o metodi di accelerazione di tipo ibrido deterministico-stocastico per la soluzione di sistemi lineari generali. La letteratura è vasta e qui ci limitiamo a segnalare i lavori di Halton [26], di Hao, Mascagni e Li [27], e di Benzi *et al.* [3] e le numerose referenze ivi contenute. Nel più semplice di questo tipo di metodi il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con A matrice quadrata invertibile, viene riformulato come un problema di punto fisso

$$\mathbf{x} = H\mathbf{x} + \mathbf{f} \tag{7}$$

dove la matrice H ha tutti gli autovalori in modulo strettamente minori di 1. Dato un qualsiasi funzionale lineare

$$J(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{h} \rangle \,,$$

con $\mathbf{h} = [h_i] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ rappresentante di Riesz di J, è possibile costruire una variabile aleatoria X tale che

$$J(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(X) \,,$$

il valore atteso di X. A sua volta la variabile aleatoria X è costruita in termini di passeggiate aleatorie sul grafo pesato e orientato definito dagli elementi H_{ij} della matrice H, governate dalla matrice di transizione $P = [p_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con

$$p_{ij} = \frac{|H_{ij}|}{\sum_{k=1}^{n} |H_{ik}|}$$

e con distribuzione iniziale definita da

$$p_i^{(0)} = \frac{|h_i|}{\sum_{k=1}^{n} |h_k|},$$

vedere [26]. Prendendo come vettore $\mathbf{h}$ i vettori della base canonica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ è possibile stimare tutte le componenti del vettore soluzione $\mathbf{x}_*$. Nel caso delle equazioni alle derivate parziali, un vantaggio di questo tipo di approccio è la possibilità di calcolare la soluzione solo in alcuni punti del dominio senza doverla calcolare sull'intero dominio. Il metodo Markov Chain Monte Carlo, tuttavia, soffre di numerosi svantaggi. Già la riduzione preliminare del sistema alla forma (7) può essere tutt'altro che facile da ottenere. Inoltre il numero di passeggiate aleatorie necessarie per ottenere delle stime sufficientemente accurate del valore atteso di X è in generale altissimo, vista la dipendenza dell'errore nei metodi Monte Carlo dal numero di prove. Molte varianti del metodo, sempre più sofisticate, sono state proposte in letteratura, incluse versioni ibride deterministico-stocastiche (vedere per es. [3]); ciononostante le prestazioni di questo tipo di metodi in algebra lineare numerica rimangono piuttosto insoddisfacenti, e il loro uso sporadico.

È evidente che i metodi probabilistici proposti da Cimmino sono di tutt'altro genere, e in linea di principio molto più semplici. Come mostreremo, tuttavia, anche gli approcci proposti da Cimmino non forniscono prestazioni soddisfacenti. Date le dimensioni già molto elevate dei sistemi lineari tipici del calcolo scientifico, aumentarne il numero non è una strategia pratica o consigliabile. Una strategia alternativa a quella proposta da Cimmino potrebbe essere quella di selezionare, in modo casuale, un sottoinsieme di d equazioni (con $d \ll n$) del sistema (1) e di costruire un'approssimazione $\mathbf{x}^{(1)}$ della soluzione prendendo il baricentro del sistema costituito dale masse individuate da $\mathbf{x}^{(0)}$ e dalle sue riflessioni (o, eventualmente, proiezioni ortogonali) rispetto ai corrispondenti iperpiani. All'iterazione successiva si selezionerà di nuovo, a caso, un sottoinsieme di d iperpiani e si otterrà una nuova approssimazione $\mathbf{x}^{(2)}$ prendendo il baricentro delle masse ottenute con la solita procedura di riflessione (o proiezione) a partire da $\mathbf{x}^{(1)}$. Rispetto al metodo di Cimmino originario (deterministico) questa procedura risulta ovviamente molto meno costosa. In forma matriciale il metodo si può scrivere come

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \frac{2}{d}(R_k A)^T (R_k \mathbf{b} - R_k A\, \mathbf{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \tag{8}$$

dove $R_0, R_1, \dots, R_k, \dots$ sono matrici $d \times n$ le cui righe sono estratte dalla matrice identità I_n in modo casuale (secondo una distribuzione data) ad ogni iterazione. È interessante notare che un'idea simile è alla base del metodo della discesa aleatoria del gradiente (*stochastic gradient descent*, SGD), forse il metodo oggi più usato per la soluzione di problemi di ottimizzazione nel contesto dell'apprendimento automatico (machine learning) ma la cui idea risale al 1951 [44]. Com'è noto, in questo metodo di discesa il gradiente di una funzione obiettivo della forma $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ell_i(\mathbf{x})$ viene sostituito, ad ogni iterazione, con il gradiente di una funzione molto più semplice ottenuta considerando solo un sottoinsieme (*mini-batch*) dell'insieme $\{\ell_1, \dots, \ell_N\}$ di cardinalità $d \ll N$, scelto a caso ad ogni passo secondo una distribuzione assegnata [47]. Sotto opportune condizioni sulla funzione obiettivo f e sulla scelta dei mini-batch, il metodo converge, in probabilità, al minimo della funzione, ad un costo fortemente ridotto rispetto al metodo (deterministico) classico in cui tutte le componenti di $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$ vengono calcolate ad ogni passo. Va sottolineato che questo è un vero metodo randomizzato, nel senso che le operazioni aritmetiche da compiere cambiano in modo casuale ad ogni passo.

Un'idea simile è alla base del metodo di Kaczmarz randomizzato, di cui esistono ormai numerose varianti: si vedano, per es. [48, 53, 39, 24, 35, 43, 36]. In questi metodi le proiezioni ortogonali sugli iperpiani (o, nelle varianti a blocchi, sulle sottovarietà affini individuate da gruppi di equazioni del sistema) non sono effettuate in modo ciclico, come nel metodo di Kaczmarz originale, ma scegliendo un sottoinsieme di iperpiani (o sottovarietà) scelte a caso, ad ogni passo, secondo una distribuzione assegnata. Nel recente lavoro [36], inoltre, viene effettuata un'operazione di *averaging* sulle proiezioni simultanee su gruppi di iperpiani: il metodo che ne risulta è sostanzialmente quello descritto da (8), con le riflessioni sostituite da proiezioni ortogonali.

Più in generale, i metodi attuali dell'algebra lineare randomizzata fanno largo uso dell'idea di *sketching*, in cui problemi di dimensione molto elevata vengono approssimati da problemi di dimensione molto inferiore scelti in modo da fornire delle buone approssimazioni, con alta probabilià, della soluzione del problema approssimato. L'accuratezza e affidabilità dei metodi basati su proiezioni aleatorie su sottospazi, largamente usati anche per la riduzione della dimensionalità di grandi quantità di dati, può essere stabilita facendo uso di tecniche alquanto sofisticate di geometria degli spazi normati, quali il Lemma di Johnson e Lindenstrauss [33] e la *Restricted Isometry Property* di Candès e Tao [7].

Come risulta da questa breve disamina, la direzione presa dall'algebra lineare numerica randomizzata moderna è quindi in un certo senso l'opposto di quella proposta da Cimmino: anziché ampliare il sistema di partenza facendo uso di combinazioni lineari di equazioni scelte a caso, si tratta piuttosto di approssimare il problema di partenza con uno di dimensione ridotta ottenuta mediante proiezioni aleatorie su sottospazi. Come risulterà evidente dagli esperimenti numerici che presenteremo, l'approccio moderno basato sul sottocampionamento è di gran lunga più efficace di quello proposto da Cimmino. D'altra parte, le tecniche probabilistiche e geometriche necessarie per stabilire l'effettiva convergenza di questi metodi alla soluzione del problema di partenza sono alquanto più avanzate di quelle richieste nell'analisi dei metodi probabilistici di Cimmino.

6. Alcuni esperimenti numerici

In questa sezione illustriamo il comportamento del metodo probabilistico di Cimmino (5) ed il metodo con campionamento casuale delle equazioni (8) su alcuni problemi test. Premettiamo che l'uso della "formula approssimata" (4) non appare in grado di fornire approssimazioni accettabili della soluzione, anche per valori elevatissimi di m.

Il primo sistema lineare considerato si basa sulla matrice *West0067* (tratta dalla collezione SuiteSparse Matrix Collection [19]). Si tratta di una matrice di dimensione $n = 67$ con un indice di condizionamento moderato (dell'ordine di 10^2). Viene scelto un vettore casuale (con componenti caratterizzate da una distribuzione normale) come soluzione, ed il termine noto viene calcolato moltiplicando la matrice A per tale vettore. Questo ci consente di calcolare l'errore commesso dai metodi rispetto alla soluzione esatta. Nella

Tabella 1 viene riportato il numero medio di iterazioni e l'accuratezza calcolata per due diverse tolleranze ε, utilizzate nel criterio di arresto

$$\frac{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k)}\|} \leq \varepsilon. \tag{9}$$

La matrice R viene generata campionandone gli elementi da una distribuzione uniforme in $[0, 1]$. L'utilizzo di distribuzioni normali nei nostri esperimenti non sembra portare in generale a differenze significative nel comportamento del metodo.

Come dato iniziale scegliamo in tutti gli esperimenti $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$. La media e la deviazione standard calcolata per diversi valori di M, sono state calcolate su un campione di 25 realizzazioni della matrice di probabilità R.

M	$\langle$err$\rangle$	σ(err)	$\langle$its$\rangle$	σ(its)
2	0.0255	0.0083	$5.60 \cdot 10^5$	$7.29 \cdot 10^4$
3	0.0203	0.0048	$4.33 \cdot 10^5$	$3.82 \cdot 10^4$
4	0.0180	0.0050	$3.99 \cdot 10^5$	$3.70 \cdot 10^4$
5	0.0171	0.0042	$3.61 \cdot 10^5$	$2.99 \cdot 10^4$
10	0.0175	0.0029	$3.51 \cdot 10^5$	$2.11 \cdot 10^4$

$\langle$err$\rangle$	σ(err)	$\langle$its$\rangle$	σ(its)
$4.62 \cdot 10^{-4}$	$6.77 \cdot 10^{-5}$	$2.25 \cdot 10^6$	$4.52 \cdot 10^5$
$3.36 \cdot 10^{-4}$	$6.73 \cdot 10^{-5}$	$1.71 \cdot 10^6$	$3.61 \cdot 10^5$
$3.10 \cdot 10^{-4}$	$5.04 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^6$	$2.73 \cdot 10^5$
$2.83 \cdot 10^{-4}$	$2.84 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^6$	$2.04 \cdot 10^5$
$2.50 \cdot 10^{-4}$	$1.71 \cdot 10^{-5}$	$1.35 \cdot 10^6$	$9.62 \cdot 10^4$

Tabella 1. Statistiche per il comportamento del metodo probabilistico (5) applicato al problema lineare con matrice *West0067* con tolleranze d'arresto 10^{-7} (illustrazione in alto) e 10^{-9} (illustrazione in basso).

La notazione nella Tabella 1 è la seguente: $\langle$err$\rangle$ rappresenta la media calcolata dell'errore relativo

$$\text{err} = \frac{\|\mathbf{x}^{(K)} - \mathbf{x}^{*}\|}{\|\mathbf{x}^{*}\|}, \tag{10}$$

dove K è l'indice dell'ultima iterazione del metodo, quella per cui si verifica il criterio di arresto (9) ed $\mathbf{x}^{*}$ denota la soluzione esatta; σ(err) rappresenta la deviazione standard calcolata dell'errore relativo; $\langle$its$\rangle$ rappresenta la media calcolata del numero di iterazioni necessario a soddisfare il criterio di arresto (9); σ(its) rappresenta la deviazione standard calcolata del numero di iterazioni di cui sopra.

La media e la deviazione standard sono state calcolate su un campione di 25 realizzazioni.

È evidente che la modesta riduzione nel numero di iterazioni ottenuta per valori crescenti di M non è sufficiente a compensare l'aumento dei costi dovuti al maggiore numero di equazioni nei corrispondenti sistemi lineari ampliati.

d	$\langle\text{err}\rangle$	$\sigma(\text{err})$	$\langle\text{its}\rangle$	$\sigma(\text{its})$
5	$5.79\cdot10^{-4}$	$1.25\cdot10^{-4}$	$2.56\cdot10^{5}$	$1.26\cdot10^{4}$
10	$3.50\cdot10^{-4}$	$5.54\cdot10^{-5}$	$2.84\cdot10^{5}$	$7.80\cdot10^{3}$
20	$2.80\cdot10^{-4}$	$2.87\cdot10^{-5}$	$2.96\cdot10^{5}$	$5.73\cdot10^{3}$
30	$2.85\cdot10^{-4}$	$3.81\cdot10^{-5}$	$2.95\cdot10^{5}$	$7.10\cdot10^{3}$
n	$5.46\cdot10^{-3}$	0	$1.31\cdot10^{5}$	0

$\langle\text{err}\rangle$	$\sigma(\text{err})$	$\langle\text{its}\rangle$	$\sigma(\text{its})$
$5.78\cdot10^{-6}$	$8.76\cdot10^{-7}$	$5.10\cdot10^{5}$	$9.08\cdot10^{3}$
$3.39\cdot10^{-6}$	$3.87\cdot10^{-7}$	$5.40\cdot10^{5}$	$6.41\cdot10^{3}$
$5.75\cdot10^{-6}$	$1.04\cdot10^{-6}$	$5.11\cdot10^{5}$	$1.06\cdot10^{4}$
$5.88\cdot10^{-6}$	$1.16\cdot10^{-6}$	$5.10\cdot10^{5}$	$1.07\cdot10^{4}$
$6.28\cdot10^{-6}$	0	$5.07\cdot10^{5}$	0

Tabella 2. Statistiche per il comportamento del metodo probabilistico con sottocampionamento (8) applicato al problema lineare con matrice *West0067* con tolleranze d'arresto 10^{-7} (illustrazione in alto) e 10^{-9} (illustrazione in basso).

Sperimentiamo ora in Tabella 2 il metodo sottocampionato (8), per vari valori di d. Ricordiamo che in questo caso vengono selezionate in maniera casuale d equazioni del sistema lineare originario, che vanno a formare al passo k-esimo la matrice $\hat{A}^{(k)}$ e il termine noto $\hat{\mathbf{b}}^{(k)}$, che si ottengono tramite normalizzazione a partire dalla matrice rettangolare $R_k\,A$ e dal vettore $R_k\,\mathbf{b}$ di dimensioni ridotte $d \times n$ e d, rispettivamente.

Da un confronto delle due tabelle si osserva immediatamente che il comportamento del metodo con sottocampionamento (8) risulta decisamente migliore rispetto al metodo classico (5) proposto da Cimmino.

Come secondo esempio consideriamo la matrice denominata *Tomography* (anch'essa inserita nella SuiteSparse Matrix Collection) di dimensione $n = 500$, derivante dall'acquisizione di dati tomografici. La matrice presenta un condizionamento di circa 10^7; per questa ragione ne consideriamo una versione modificata.

Denominiamo con A la matrice normalizzata (in norma Euclidea) e consideriamo la matrice

$$A + \alpha\,\mathrm{I}, \qquad \alpha = 10^{-3},$$

dove I è la matrice identità. Il metodo di Cimmino tradizionale (non probabilistico), posta la tolleranza $\varepsilon = 10^{-8}$, fornisce dopo 3312 iterazioni una approssimazione $\mathbf{x}^{(K)}$ ($K = 3312$) con un errore relativo rispetto alla soluzione esatta $\|\mathbf{x}^{(K)} - \mathbf{x}^*\|/\|\mathbf{x}^*\| = 3.0667\cdot10^{-6}$.

Il metodo sottocampionato risulta essere decisamente efficiente; il suo comportamento, al variare del numero d di equazioni selezionate ad ogni iterazione, è illustrato nella Tabella 3. La media e la deviazione standard sono state calcolate – come le precedenti – su un campione di 25 realizzazioni. Si osservi che per $d = 10$ ed $\varepsilon = 10^{-8}$ si ottiene una approssimazione della soluzione dello stesso ordine di quella ottenuta con il metodo classico di Cimmino, con un numero di iterazioni molto simile e con un costo per iterazione molto ridotto, precisamente $d/n = 1/50$.

d	$\langle \text{err} \rangle$	$\sigma(\text{err})$	$\langle \text{its} \rangle$	$\sigma(\text{its})$
10	$4.47 \cdot 10^{-4}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$	$2.10 \cdot 10^{3}$	$8.01 \cdot 10^{1}$
20	$1.69 \cdot 10^{-4}$	$4.87 \cdot 10^{-5}$	$2.26 \cdot 10^{3}$	$4.26 \cdot 10^{1}$
50	$1.28 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-5}$	$2.28 \cdot 10^{3}$	$2.04 \cdot 10^{1}$
100	$1.46 \cdot 10^{-4}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$	$2.21 \cdot 10^{3}$	$1.37 \cdot 10^{1}$
200	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$8.73 \cdot 10^{-6}$	$2.14 \cdot 10^{3}$	$1.08 \cdot 10^{1}$

$\langle \text{err} \rangle$	$\sigma(\text{err})$	$\langle \text{its} \rangle$	$\sigma(\text{its})$
$7.40 \cdot 10^{-6}$	$3.09 \cdot 10^{-6}$	$3.28 \cdot 10^{3}$	$9.72 \cdot 10^{1}$
$3.19 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$3.43 \cdot 10^{3}$	$7.60 \cdot 10^{1}$
$2.00 \cdot 10^{-6}$	$3.75 \cdot 10^{-7}$	$3.48 \cdot 10^{3}$	$2.51 \cdot 10^{1}$
$2.23 \cdot 10^{-6}$	$2.90 \cdot 10^{-7}$	$3.43 \cdot 10^{3}$	$1.70 \cdot 10^{1}$
$2.70 \cdot 10^{-6}$	$2.23 \cdot 10^{-7}$	$3.36 \cdot 10^{3}$	$1.71 \cdot 10^{1}$

Tabella 3. Statistiche per il comportamento del metodo probabilistico con sottocampionamento (8) applicato al problema lineare con matrice *Tomography* con tolleranze d'arresto 10^{-6} (illustrazione in alto) e 10^{-8} (illustrazione in basso).

Questi esperimenti mostrano chiaramente la superiorità dell'approccio moderno (basato sul sottocampionamento) rispetto all'idea di Cimmino, basata su quello che si potrebbe definire un *sovracampionamento* delle equazioni da risolvere.

7. Conclusioni

In questo lavoro abbiamo voluto mettere in evidenza alcuni contributi, ancora poco noti, forniti da Cimmino all'analisi numerica. Cimmino era prima di tutto un analista e lavorava in un contesto, quello della matematica Bolognese (e più in generale italiana) degli anni Sessanta e Settanta, nel quale l'analisi numerica era un settore di ricerca assai poco coltivato e del tutto marginale. Cimmino non seguiva, apparentemente, gli importanti sviluppi che l'analisi numerica e il calcolo scientifico stavano avendo, proprio in quegli anni, in paesi come gli Stati Uniti, l'Unione Sovietica, il Regno Unito o anche nella vicina Svizzera (pensiamo in particolare all'ETH). Sicuramente non aveva alcuna esperienza diretta dell'uso dei calcolatori elettronici per la soluzione di problemi scientifici e ingegneristici, ed è probabile che negli anni intercorsi tra il suo impiego come collaboratore dell'INAC negli anni Trenta e la stesura del lavoro [11] si sia del tutto disinteressato al problema della soluzione numerica dei sistemi lineari. Proprio in quel trentennio l'analisi numerica vide sviluppi imponenti e la pubblicazione di importanti monografie specializzate sui metodi iterativi dell'algebra lineare, ma nei lavori di Cimmino non vi è alcuna evidenza che egli fosse a conoscenza di questi sviluppi.

In vista di tutto ciò, è davvero notevole che Cimmino sia comunque riuscito a proporre idee innovative nel campo dell'analisi numerica probabilistica. Il fatto che le estensioni probabilistiche del suo metodo proposte in [11, 12] siano passate del tutto inosservate è dovuto in primo luogo all'uso dell'italiano e alla collocazione editoriale dei lavori, certamente non ottimale per quanto riguarda la possibilità di raggiungere la giusta cerchia di lettori, e in secondo luogo all'isolamento in cui Cimmino lavorava. È facile ipotizzare che se Cimmino fosse stato informato degli sviluppi dell'analisi numerica contemporanea e se avesse avuto modo di discutere con esperti della disciplina avrebbe forse potuto formulare versioni più efficienti dei suoi algoritmi.

Il contributo di gran lunga più importante e duraturo dato da Cimmino alla matematica computazionale rimane dunque il suo lavoro del 1938 [10]. A differenza che negli anni Trenta, quando l'analisi numerica esisteva solamente in forma embrionale ed era pertanto possibile per qualunque matematico (o fisico, astronomo, ingegnere,...) dotato di sufficiente creatività e talento dare validi contributi originali alla disciplina, a partire dagli anni Sessanta questo non fu più possibile, in quanto la crescita della disciplina nei trent'anni trascorsi rese indispensabile il possesso di cognizioni specialistiche avanzate da parte dei ricercatori impegnati nel settore. Ciononostante, le idee di Cimmino rimangono comunque affascinanti e lo collocano sicuramente tra i pionieri dell'algebra lineare numerica randomizzata, una disciplina che a distanza di mezzo secolo dalla sua opera sta conoscendo una crescita esplosiva.

Ringraziamento

Gli autori desiderano ringraziare il Professor Pierluigi Contucci per il gradito invito a contribuire con questo nostro articolo al presente volume.

Bibliografia

[1] M. Benzi, *Gianfranco Cimmino's contributions to numerical mathematics,* in *Atti del Seminario di Analisi Matematica*, Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna. Volume Speciale: Ciclo di Conferenze in Ricordo di Gianfranco Cimmino, Marzo-Maggio 2004, Tecnoprint, Bologna (2005), pp. 87–109.

[2] M. Benzi, *Gianfranco Cimmino's contributions to numerical mathematics,* Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, Vol. LXXXIX (2023) pp. 73–98. (Versione riveduta, corretta e aggiornata di [1].)

[3] M. Benzi, T. M. Evans, S. P. Hamilton, M. Lupo-Pasini, and S. R. Slattery, *Analysis of Monte Carlo accelerated iterative methods for sparse linear systems*, Numer. Linear Algebra Appl., 24 (2017), e2088.

[4] M. Benzi and E. Toscano, *Mauro Picone, Sandro Faedo, and the numerical solution of partial differential equations in Italy (1928–1953)*, Numerical Algorithms, 86 (2014), pp. 105–145.

[5] E. Bodewig, *Matrix Calculus*, North-Holland, Amsterdam, 1956.

[6] C. Brezinski, G. Meurant, and M. Redivo-Zaglia, *A Journey through the History of Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2022.

[7] E. Candès and T. Tao, *Decoding by linear programming*, IEEE Trans. Inf. Th., 51 (2005), pp. 4203–4215.

[8] Y. Censor, *Row-action methods for huge and sparse systems and their applications*, SIAM Review, 23 (1981), pp. 444–466.

[9] Y. Censor, M. D. Altschuler, W. D. Powlis, *On the use of Cimmino's simultaneous projection method for computing a solution of the inverse problem in radiation therapy treatment planning*, Inverse Problems, 4 (1988), pp. 607–623.

[10] G. Cimmino, *Calcolo approssimato per le soluzioni dei sistemi di equazioni lineari*, La Ricerca Scientifica, II, 9 (1938), pp. 326–333.

[11] G. Cimmino, *Un metodo Monte Carlo per la risoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, XII, 2 (1967), pp. 39–44. Ristampato in [16], pp. 505–511.

[12] G. Cimmino, *Su uno speciale tipo di metodi probabilistici in analisi numerica*, Symposia Mathematica, Istituto Nazionale di Alta Matematica, X, Academic Press, London and New York, 1972, pp. 247–254. Ristampato in [16], pp. 545–552.

[13] G. Cimmino, *An unusual way of solving linear systems*, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei, VIII, 80 (1986), pp. 6–7. Ristampato in [16], pp. 633–634.

[14] G. Cimmino, *La regola di Cramer svincolata dalla nozione di determinante*, Rendiconti dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, XIII, 10 (1986/1987), pp. 115–122. Ristampato in [16], pp. 635–642.

[15] G. Cimmino, *On some identities involving spherical means*, Rendiconti della Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali dell'Accademia Nazionale dei Lincei, VIII, 83 (1989), pp. 69–73. Ristampato in [16], pp. 649–652.

[16] G. Cimmino, *Opere Scelte*, a cura di C. Sbordone and G. Trombetti, Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche della Società Nazionale di Scienze Lettere e Arti in Napoli, Giannini, Napoli, 2002.

[17] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy, *Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik*, Mathematische Annalen, 100 (1928), pp. 32–74.

[18] J. H. Curtiss, *Sampling methods applied to differential and difference equations*, Proc. Seminar on Scientific Computation, Nov. 1949, IBM, New York, NY, 1950, pp. 87–109.

[19] T. A. Davis and Y. Hu, *The University of Florida Sparse Matrix Collection*, ACM Trans. Math. Softw. 38, 1, Article 1 (December 2011), 25 pages.

[20] D. K. Faddeev and V. N. Faddeeva, *Computational Methods of Linear Algebra*, W. H. Freeman and Co., San Francisco and London, 1963. Traduzione inglese dell'originale russo pubblicato da Nauka, Mosca, 1960.

[21] G. E. Forsythe, *Tentative classification of methods and bibliography on solving systems of linear equations*, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 29 (1953), pp. 1–28.

[22] G. E. Forsythe and R. A. Leibler, *Matrix inversion by a Monte Carlo method*, Math. Tables Other Aids Comput., 6 (1952), pp. 78–81.

[23] N. Gastinel, *Linear Numerical Analysis*, Academic Press, New York, 1970. Traduzione inglese dell'originale francese pubblicato da Hermann, Parigi, 1966.

[24] R. Gowers and P. Richtárik, *Randomized iterative methods for linear systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 36 (2015), pp. 1660–1690.

[25] M. Guida and C. Sbordone, *The reflection method for the numerical solution of linear systems*, SIAM Review, to appear.

[26] J. H. Halton, *Sequential Monte Carlo techniques for the solution of linear systems*, J. Sci. Comput., 9 (1994), pp. 213–257.

[27] J. Hao, M. Mascagni, and Y. Li, *Convergence analysis of Markov chain Monte Carlo linear solvers using Ulam–von Neumann algorithm*, SIAM J. Numer. Anal., 51 (2013), pp. 2107–2122.

[28] G. T. Herman, *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*, Springer-Ver;ag Ltd., London, 2000.

[29] M. R. Hestenes and J. Todd, *Mathematicians Learning to Use Computers. The Institute for Numerical Analysis, UCLA 1947-1954*, National Institute of Standard and Technology and The Mathematical Association of America, Washington, DC, 1991.

[30] A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Blaisdell & Co., New York, 1964. Ristampato da Dover Publishing Inc., New York, 1975.

[31] C. G. J. Jacobi, *Über eine neue Auflösungsart der bei der Methode der kleinsten Quadrate vorkommenden linearen Gleichungen*, Astronomische Nachrichten, 22 (1845), 297–306. Ristampato in *Gesammelte Werke*, vol. III, pp. 469–478.

[32] C. G. J. Jacobi, *Dato systemate n equationum linearium inter n incognitas, valores incognitarum per integralia definita $(n-1)$-tuplicia exhibentur*, Crelle Journal, 14 (1834), pp. 51–55. Ristampato in *Gesammelte Werke*, vol. VI, pp. 79–85.

[33] W. B. Johnson and Y. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, in R. Beals, A. Beck, A. Bellow *et al.* (Eds.), *Conference in Modern Analysis and Probability (New Haven, CT, 1982)*, Contemporary Mathematics vol. 26, American Mathematical Society, Providence, RI, 1984, pp. 189–206.

[34] S. Kaczmarz, *Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen*, Bulletin International de l'Académie Polonaise des Sciences et Lettres, A, 35 (1937), pp. 355–357. Traduzione inglese in *International Journal of Control*, 57 (1993), pp. 1269–1271.

[35] A. Ma, D. Needell, and A. Ramdas, *Convergence properties of the randomized extended Gauss-Seidel and Kaczmarz methods*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 36 (2015), pp. 1590–1604.

[36] J. D. Moorman, T. K. Tu, D. Molitor, and D. Needell, *Randomized Kaczmarz with averaging*, BIT Numer. Math., 61 (2021), pp. 337–359.

[37] M. Z. Nashed, *Continuous and semicontinuous analogues of iterative methods of Cimmino and Kaczmarz with applications to the inverse Radon transform*, Proceedings of the Oberwolfach Conference on Mathematical Aspects of Computerized Tomography, Lecture Notes in Medical Informatics, 8 (1981), pp. 160–178.

[38] P. Nastasi, *I primi quarant'anni di vita dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo "Mauro Picone,"* Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Sez. A, Fascicolo Monografico, Dicembre 2006.

[39] D. Needell and J. Tropp, *Paved with good intentions: Analysis of a randomized block Kaczmarz method*, Linear Algebra Appl., 441 (2014), pp. 199–221.

[40] J. J. O'Connor and E. F. Robertson, *Gianfranco Luigi Giuseppe Cimmino*, Mac Tutor History of Mathematics Archive, URL: `http://https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cimmino/` (2013).

[41] B. Pini, *Gianfranco Cimmino*, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, A(7), 5 (1991), pp. 117–123. Ristampato in [16], pp. 653–659.

[42] L. F. Richardson, *The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations with an application to the stresses in a masonry dam*, Phil. Trans. Royal Soc. London, A, 210 (1910), pp. 307–357.

[43] P. Richtárik and M. Takác, *Stochastic reformulation of linear systems: formulation and convergence theory*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 41 (2020), pp. 487–524.

[44] H. Robbins and S. Monro, *A stochastic approximation method*, Annals of Math. Stat., 22 (1951), pp. 400–407.

[45] Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Second Edition, SIAM, Philadelphia, 2003.

[46] G. Scorza Dragoni, *Gianfranco Cimmino*, Rendiconti dell'Accademia dei Licei (Supplemento), 9, 2 (1991), pp. 59–68. Ristampato in [16], pp. 661–668.

[47] G. Strang, *Linear Algebra and Learning from Data*, Wellesley Cambridge Press, Wellesley, MA, 2019.

[48] T. Strohmer and R. Vershynin, *A randomized Kaczmarz algorithm with exponential convergence*, J. Fourier Anal. Appl., 15 (2009), pp. 262–278.

[49] F. Sukru Torun, M. Manguoglu, and C. Aykanat, *Enhancing block Cimmino for sparse linear systems with dense columns via Schur complements*, SIAM J. Sci. Comput., 45 (2023), pp. C49–C72.

[50] G. Wahba, *Three topics in ill-posed problems*, Proceedings of the Conference on Inverse and Ill-Posed Problems, (Sankt Wolfgang, 1986), Notes and Reports in the Mathematical Sciences and Engineering, 4, Academic Press, Boston, MA, 1987, pp. 37–51.

[51] C. Wu, R. Jeraj, W. Lu, and T. R. Mackie, *Fast treatment plan modification with an over-relaxed Cimmino algorithm*, Medical Physics, 31 (2004), pp. 191–200.

[52] Y. Xiao, D. Michalski, J. M. Galvin, and Y. Censor, *The least-intensity feasible solution for aperture-based inverse planning in radiation therapy*, Annals of Operations Research, 119 (2003), pp. 183–203.

[53] A. Zouzias and N. M. Freris, *Randomized extended Kaczmarz for solving least squares*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 34 (2013), pp. 773–793.

L'analisi geometrica delle equazioni alle derivate parziali e Bologna

*Alberto Parmeggiani**

Lo scopo di queste pagine è duplice: da una parte desidero illustrare, in modo assolutamente informale e "divulgativo" (raccontando alcuni risultati e problemi aperti), il campo di ricerca matematica che si chiama *analisi geometrica delle equazioni alle derivate parziali* (o anche *analisi geometrica nello spazio delle fasi*) e dall'altra ricordare l'amico, collega e maestro Cesare Parenti (1942-2021), il quale introdusse in Italia questo campo e creò a Bologna un primo nucleo di studiosi che si è poi ampliato in quello attuale, costituito da studiosi in parte formatisi qui ed altrove (come chi scrive) e ben conosciuto a livello internazionale.

In Fisica lo spazio delle fasi (posizioni e momenti) è un concetto geometrico che unifica la *meccanica hamiltoniana classica* e la *meccanica quantistica*.

In Matematica lo spazio delle fasi è un concetto geometrico che unifica la geometria simplettica con l'analisi armonica e lo studio delle EDP (equazioni alle derivate parziali).

Lo spazio delle fasi è il fibrato cotangente T^*M dell'insieme M sul quale si lavora (in genere una varietà differenziabile liscia di dimensione finita n) e cioè le coppie posizione e momento (x, ξ) che stanno (localmente) nel prodotto cartesiano $\Omega \times \mathbb{R}^n$ (dove Ω è una carta locale di M ed $\mathbb{R}^n$ è qui pensato come il duale dell'$\mathbb{R}^n$ tangente nel punto x ad M).

Anche senza scegliere una metrica Riemanniana su M, il cotangente possiede più struttura del fibrato tangente: è sempre una varietà simplettica, cioè munita in modo naturale di una 2-forma differenziale chiusa e nondegenere che permette di definire le derivazioni naturali (cioè invarianti rispetto a cambiamenti di variabile che rispettano la struttura simplettica) di tale geometria, le quali sono i campi hamiltoniani. La struttura dello spazio delle fasi risulta dunque invariante per diffeomorfismi simplettici, cioè quei diffeomorfismi che conservano la forma simplettica, alias le trasformazioni canoniche della meccanica analitica.

*Dipartimento di Matematica, Alma Mater Studiorum – Università di Bologna.
Email: alberto.parmeggiani@unibo.it

Giova osservare che ogni diffeomorfismo della varietà delle configurazioni M (cioè un cambiamento di variabile liscio ed invertibile con inverso della stessa regolarità) genera una diffeomorfismo simplettico in T^*M, ma i diffeomorfismi simplettici sono più numerosi.

Dunque l'ambiente nel quale vive l'analisi geometrica delle EDP è il fibrato cotangente, alias spazio delle fasi. Un insieme di strumenti fondamentali per questo tipo di analisi è quello dell'*analisi microlocale*, cioè la tecnica dei fronti d'onda e degli operatori pseudodifferenziali, che ha raggiunto un alto e piuttosto completo grado di sviluppo e che sta al crocevia della *geometria simplettica*, della *meccanica analitica*, dell'*analisi funzionale*, dell'*analisi armonica* e della *meccanica quantistica*. Il calcolo pseudodifferenziale, nel concetto di operatore pseudodifferenziale che generalizza quello di operatore differenziale, contiene gli inversi di operatori ellittici e pseudoinversi di operatori più generali, purché "ragionevoli" (ma significativi). Esso, dalla sua prima forma dovuta a L. Nirenberg e J. J. Kohn, e L. Hörmander nel 1965, è stato generalizzato alla teoria degli operatori integrali di Fourier (quegli operatori cioè che, localmente, sono la quantizzazione delle trasformazioni canoniche) dovuta in parte a V. P. Maslov e principalmente a L. Hörmander, e J. J. Duistermaat e L. Hörmander, al calcolo pseudodifferenziale di R. Beals e C. Fefferman che è poi stato a sua volta generalizzato alla quantizzazione di Weyl-Hörmander ad infine alla teoria FBI (Fourier-Bros-Iagolnitzer) dovuta a J. Sjöstrand (quantizzazione di trasformazioni canoniche complesse). È interessante qui ricordare anche l'estensione (iniziata in questi ultimi anni da V. Turunen, M. Ruzhansky e V. Fischer) dell'analisi microlocale, e problematiche sottese, al caso dei gruppi di Lie compatti e più in generale nilpotenti (cosa a cui sta dando un contributo recente anche il gruppo bolognese).

Desidero notare che l'analisi microlocale, in virtù di raffinamenti basati sulla decomposizione di Littlewood-Paley, ha permesso tramite il calcolo paradifferenziale dovuto a J. M. Bony una estensione di queste tecniche alle equazioni con coefficienti poco regolari e quelle non-lineari.

Tra i numerosi successi del calcolo pseudodifferenziale ce n'è uno in particolare molto importante che ha permesso, per esempio, l'estensione naturale del calcolo pseudodifferenziale alle varietà: riconoscere quali termini nel simbolo di un operatore differenziale $P(x,D)$ (il polinomio nelle variabili ξ, $P(x,\xi)$, di grado l'ordine m di $P(x,D)$, definito sullo spazio delle fasi, ottenuto tramite la sostituzione formale della derivata $D = -i\partial$ con la ξ) sono invarianti per cambi di variabile simplettici, quelli, come detto, ammessi perché conservano la struttura dello spazio delle fasi. Il simbolo principale (la parte di grado massimo del polinomio) è una funzione invariantemente definita sul cotangente. Quando esso è sempre diverso da zero per $\xi \neq 0$, l'operatore è ellittico e molto si conosce della struttura delle soluzioni di equazioni ellittiche. In questo caso si riescono a costruire operatori (pseudodifferenziali) che rappresentano dei pseudoinversi dell'operatore (cioè inversi modulo un operatore regolarizzante, cioè continuo dalle distribuzioni alle funzioni C^∞), ed è questa una delle ragioni dell'introduzione del calcolo pseudodifferenziale e della sua importanza fondamentale nella teoria delle EDP.

Ma cosa si può dire quando il simbolo principale si annulla? In tale caso, sul suo insieme degli zeri, l'*insieme caratteristico* di P (nel caso a coefficienti costanti si tratta di una varietà algebrica), il *simbolo sottoprincipale* entra in gioco: formato dal termine di ordine $m-1$ di $P(x,\xi)$ e da certe derivate della parte principale, esso è invariante sull'insieme caratteristico. Dove anche il sottoprincipale si annulla, allora (tramite il calcolo di Weyl) si possono identificare ulteriori invarianti, cioè determinare in modo iterativo i termini invarianti e significativi a livello k su ciascun insieme di annullamento dei termini invarianti determinati al livello precedente $k-1$. In questo modo lo studio della EDP passa allo studio della geometria simplettica dei vari insiemi di annullamento e del modo di annullarsi dei vari termini significativi del simbolo, oltreché del comportamento delle bicaratteristiche dell'operatore (le soluzioni delle equazioni di Hamilton relative al simbolo principale, che fogliano l'insieme caratteristico) e del loro linearizzato quando gli annullamenti sono di grado maggiore o uguale a 2.

L'introduzione dell'analisi nello spazio delle fasi ha permesso una geometrizzazione dello studio delle EDP e ha permesso una varietà di progressi quali, per esempio, l'affrontare in modo unificato problemi degeneri, sia ellittico-degeneri, o ellittico-parabolici, che debolmente iperbolici, tipi che sono classicamente sempre stati concepiti come lontanissimi quando visti dal punto di vista dei relativi problemi al contorno o di Cauchy. I problemi, in quanto geometrizzati, sono stati descritti e risolti in maniera invariante, cioè indipendentemente dalla scelta delle coordinate.

È nell'introduzione in Italia dell'analisi microlocale che Cesare Parenti entra in gioco. Cesare si forma all'Università di Bologna nell'ambito della prestigiosa scuola locale di Analisi Matematica. Negli anni '70 e '80 è qui ancora operante Gianfranco Cimmino (strettamente legato scientificamente ed in amicizia a Renato Caccioppoli), il quale fu studioso di EDP e precursore della teoria delle distribuzioni di L. Schwartz. Lamberto Cattabriga e Bruno Pini, allievi di Cimmino, ne proseguono l'opera su temi collegati. In particolare, Pini ottiene risultati rilevanti nel campo delle equazioni paraboliche e rivolge molte energie agli allievi, che lascia liberi di indirizzarsi verso i campi di ricerca che stavano emergendo in quel periodo. Parenti si laurea con Pini nel 1967 e, dopo alcuni primi lavori sulle equazioni quasi-ellittiche generalizzanti il caso parabolico, si indirizza autonomamente alla teoria degli operatori pseudodifferenziali.

Nel 1972 Parenti pubblica un lavoro sugli operatori pseudodifferenziali globalmente definiti su $\mathbb{R}^n$ che da quel momento è stato sempre citato in numerosi lavori importanti, in particolare di teoria dello *scattering* geometrico. Successivamente, insieme a Luigi Rodino (Università di Torino) affronta problematiche sulla teoria della ipoellitticità (che menzionerò poco più sotto) che rappresentano ancora oggi risultati di particolare importanza. A questo punto il calcolo pseudodifferenziale è introdotto in Italia e le scuole di Bologna e di Torino, sotto la spinta di Cesare Parenti e Luigi Rodino, cominciano a svilupparsi.

Uno dei temi di principale interesse, che per Parenti è rimasto invariato nel corso della sua attività, è quello dell'*ipoellitticità* degli operatori differenziali alle derivate parziali.

Esso si può descrivere nel seguente modo. Dato un operatore P (a coefficienti C^∞) ed una distribuzione u su un aperto Ω (di $\mathbb{R}^n$ o di una varietà differenziabile), dall'ipotesi $Pu \in C^\infty$ su $V \subset \Omega$ segue che $u\big|_V \in C^\infty(V)$. Conoscere quando P è ipoellittico è un problema fondamentale della teoria delle EDP, in quanto intimamente legato al problema della *risolubilità (locale e semi-globale)* e della *teoria spettrale*. Più precisamente si vuole sapere quali sono le condizioni necessarie e/o sufficienti sul simbolo dell'operatore P, che rendono P ipoellittico. Poiché si vogliono proprietà invarianti per trasformazioni simplettiche (quelle ammissibili dello spazio delle fasi) le condizioni dovranno essere lette sui vari pezzi del simbolo di P, descritti prima, invarianti sui vari insiemi di annullamento ed in termini della geometria (simplettica) stessa di tali insiemi.

Per esempio, nello studio della *subellitticitià* ed ipoellitticità di classi importanti come le somme di quadrati di campi vettoriali, l'approccio pseudodifferenziale di Kohn (che ha dato vita alla teoria dei moltiplicatori subellittici) è fondamentale per la prova nel caso C^∞, risultato poi reso più preciso in termini di regolarità Sobolev da L. Rothschild e E. Stein con la tecnica del lifting nilpotente e la scrittura di una soluzione fondamentale. E ancora, sia nel caso analitico (congettura di Treves) che nel caso Gevrey (classi intermedie tra C^∞ e la classe analitica), ha importanza fondamentale una stratificazione dell'insieme caratteristico (stratificazione di Poisson) la quale, in base alla sua struttura geometrica interamente dettata dai campi considerati e dai loro commutatori iterati, determina la natura ipoellittica, o meno, nella classe analitica o Gevrey dell'operatore stesso.

In generale, il problema della ipoellitticità è lungi dall'essere risolto. L'unico risultato completo è dovuto a L. Hörmander nel caso a coefficienti costanti. Usando tecniche di *geometria algebrica reale* egli ha infatti caratterizzato gli operatori a coefficienti costanti ipoellittici in termini del posizionamento della varietà algebrica caratteristica rispetto alle direzioni reali. È un risultato bellissimo ed elegante il quale, nel successivo studio delle localizzazioni all'infinito di un operatore, ha permesso di ottenere risultati sull'ipoellitticità e sulla risolubilità di ampie classi di operatori differenziali *di forza costante*.

Per quanto riguarda la subellitticità, oltre al lavoro di L. Hörmander e Ju. V. Egorov, è rilevante ricordare l'approccio dovuto a C. Fefferman e D. Phong chiamato *principio SAK*, e poi generalizzato nella mia tesi di Ph.D. (il mio advisor è stato Charles Fefferman), che consiste nel costruire delle metriche subunitarie (sulla varietà e più in generale nello spazio delle fasi) legate al simbolo dell'operatore tramite le quali determinare delle opportune localizzazioni che permettono di ottenere le stime a priori (ottimali) necessarie a tutto il successivo studio della esistenza e regolarità delle soluzioni della relativa EDP.

Su una varietà differenziabile compatta, il problema della *ipoellitticità locale* è in modo naturale associato al problema della *ipoellitticità globale*. Si possono costruire esempi di operatori che sono globalmente ipoellittici senza essere localmente ipoellittici. Ciò ha a che fare con la struttura dei diffeomorfismi della varietà in sé. È soprattutto interessante questo fenomeno per i campi vettoriali, anche su gruppi di Lie, in quanto la struttura geometrica dell'ambiente e del campo si riflette sull'ipoellitticità tramite condizioni diofantine sui coefficienti.

Un altro aspetto legato all'ipoellitticità è quello della *ipoellitticità C^∞ con grande perdita di derivate*. Ci sono operatori differenziali che sono ipoellittici ma che non soddisfano nessuna disuguaglianza a priori che possa dare la ipoellitticità. Un primo esempio (sul gruppo di Heisenberg, nel 1982) è dovuto ad E. Stein, il quale fece vedere che il Laplaciano di Kohn sulle $(0,0)$ e sulle $(0,n)$ forme differenziali sul gruppo di Heisenberg non è ipoellittico, ma lo diventa appena gli si aggiunge una costante non-nulla. Successivamente, nel 2005 J. J. Kohn ha mostrato classi di esempi di campi a coefficienti complessi la cui somma di quadrati aveva tale proprietà e, contemporaneamente, Cesare Parenti ed io abbiamo sviluppato una teoria per operatori differenziali con termini di ordine inferiore che soddisfano opportune condizioni di annullamento, oggi chiamate *condizioni di Levi* (legate ad Eugenio Elia Levi, morto giovanissimo nella prima guerra mondiale, il quale era fratello di Beppo Levi, quest'ultimo attivo a Bologna e successivamente emigrato in Argentina a causa delle vergognose leggi razziali). La nostra teoria fornisce una spiegazione degli esempi di Stein e Kohn tramite la costruzione di una parametrice nelle classi che furono introdotte da L. Boutet De Monvel nel suo studio (successivamente in collaborazione con A. Grigis e B. Helffer) dell'ipoellitticità con perdita di una derivata (che estende l'approccio di V. V. Grushin). Questo studio coinvolge in modo cruciale la geometria simplettica. Si devono infatti considerare il fibrato normale sulla varietà caratteristica con fibre che contengono sottospazi simplettici e considerare lo sviluppo di Taylor della parte del simbolo dell'operatore che è invariante sulla varietà caratteristica nelle direzioni normali (esso è composto anche da ulteriori termini, non solo dal simbolo principale, in virtù delle condizioni di Levi). In questo modo si ottiene un polinomio nelle variabili normali in ciascun punto caratteristico che può quindi essere quantizzato rispetto alle variabili simplettiche, ottenendo così degli operatori differenziali alle derivate parziali dipendenti da parametri (il punto base del fibrato e le parti involutive della fibra) le cui proprietà spettrali si mostrano essere invarianti e contenere tutte le informazioni necessarie alla costruzione della parametrice (ma, di più, mostrano ostruzioni per certi operatori al risultato di Stein).

Legato alla ipoellitticità è il problema della *risolubilità* (ogni operatore ipoellittico ha trasposto, o equivalentemente aggiunto, localmente risolubile). Nel 1957 H. Lewy mostrò che non tutti gli operatori differenziali (anche con coefficienti buonissimi) sono risolubili in C^∞. L'operatore di Lewy è un operatore naturale (a coefficienti polinomiali) che genera il complesso di bordo (di Cauchy-Riemann) dell'aperto pseudoconvesso $\{(z_1,z_2) \in \mathbb{C}^2;\ |z_1|^2 + 2\operatorname{Im} z_2 < 0\}$. La comunità fu colta di sorpresa da tale risultato. Subito L. Hörmander, con contributi importanti di Ju. V. Egorov, V. V. Grushin, iniziò a sviluppare una teoria della risolubilità, che, passando per lavori fondamentali di L. Nirenberg e F. Treves, e C. Fefferman e R. Beals, è continuato fino ai giorni nostri con la soluzione nel 2006, dovuta a N. Dencker, della congettura di Nirenberg-Treves (che riguarda la risolubilità locale di operatori di tipo principale il cui simbolo soddisfa la condizione (Ψ) di Nirenberg e Treves: la parte immaginaria del simbolo principale non può cambiare di segno da $-$ a $+$ lungo le bicaratteristiche nulle orientate della parte reale). La risolubilità con perdita di 3/2 derivate, che è il risultato ottimale, è dovuto a N. Lerner sempre nel 2006. Ma il problema della risolubilità semiglobale è ancora aperto e risolto, per merito di L. Hörmander e N. Dencker, solo per gli operatori di tipo principale che soddisfano la condizione (P) (la parte immaginaria del simbolo principale non può cambiare di segno lungo le bicaratteristiche nulle della parte reale). Il problema della risolubilità locale/semiglobale di operatori a caratteristiche multiple è ancora largamente inesplorato, a parte alcuni risultati dovuti a P. Cordaro, L. Pernazza, F. Colombini, F. Treves, a Cesare Parenti e me ed a S. Federico e me.

Il caso della risolubilità dei sistemi è ancora largamente aperto (ci sono risultati recenti di N. Dencker).

Un altro importante campo d'indagine dell'analisi geometrica nello spazio delle fasi, sia teorico che per le applicazioni, è la *buona posizione del problema di Cauchy* (lineare) *debolmente iperbolico* (cioè a caratteristiche multiple). Si può pensare ad un operatore delle onde a due velocità le quali in certi punti diventano uguali (oppure si annullano). I lavori pioneristici di V. Ivrii e V. Petkov e di L. Hörmander, e poi R. Melrose, T. Nishitani e N. Iwasaki hanno individuato condizioni necessarie e/o sufficienti affinché il problema di Cauchy per una certa classe di operatori debolmente iperbolici sia ben posto, condizioni basate sul tipo spettrale del linearizzato del flusso bicaratteristico (nella varietà caratteristica, che è invariante per tale flusso). Il legame tra geometria e risolubilità, per la prova della necessità, avviene attraverso lo studio del comportamento di soluzioni asintotiche usando le stime a priori di risolubilità. Per la sufficienza, nelle giuste ipotesi si costruisce una nuova direzione di evoluzione (che in questi casi non coincide in genere con la direzione temporale data dalle coordinate) e poi si provano stime dell'energia per una opportuna energia costruita in termini di questa nuova direzione. In certi casi le condizioni sufficienti sono anche necessarie ed in generale quelle sufficienti sono più stringenti di quelle necessarie (come è naturale aspettarsi). Ma più difficile è lo studio della buona posizione del problema di Cauchy per operatori debolmente iperbolici per i quali esistono bicaratteristiche nulle instabili che partono nella varietà caratteristica ed atterrano sulla varietà doppia (che è presente a causa della debole iperbolicità). In tal caso l'esistenza di tali curve rende il problema di Cauchy non ben posto. L'esistenza di tali curve è dovuta ad una derivata terza del simbolo principale in una certa direzione sulla varietà caratteristica che non si annulla. Quando quest'ultima si annulla, allora il problema di Cauchy è ben posto in C^∞. Questo risultato è dovuto al lavoro del gruppo bolognese capeggiato da Parenti ed al lavoro di Nishitani. Un problema di ordine di difficoltà ancora maggiore, in parte risolto tramite i lavori (molto recenti) di Nishitani, e di Parenti ed io, ma non ancora completato, è quando il tipo spettrale del linearizzato del flusso hamiltoniano presenta delle transizioni di tipo sulla varietà. Di nuovo, la presenza di certe derivate terze del simbolo principale sulla varietà caratteristica gioca un ruolo fondamentale.

In generale la buona posizione di un problema di Cauchy, oppure l'analisi dello spettro di un operatore differenziale (o sistema di operatori differenziali), utilizza una serie di *stime dal basso* (alias *stime di quasi-positività*) che vanno da quella famosissima di Gårding (dovuta a L. Gårding) valida per operatori pseudodifferenziali il cui simbolo principale è ellittico, a quella Sharp-Gårding (dovuta a L. Hörmander) valida per operatori pseudodifferenziali il cui simbolo principale è solamente non-negativo, a quella di A. Melin, basata sulla non-negatività del simbolo principale e sul comportamento del sottoprincipale rispetto alla *traccia positiva* del linearizzato F del flusso bicaratteristico (un invariante simplettico) sulla varietà caratteristica, a quella di Fefferman-Phong valida per operatori pseudodifferenziali a simbolo totale limitato dal basso e quella di Hörmander per operatori pseudodifferenziali classici sotto ipotesi geometriche sulla varietà caratteristica ed il suo tipo simplettico, sulla non-negatività del simbolo principale il quale deve annullarsi esattamente al secondo ordine sulla varietà caratteristica e del comportamento del sottoprincipale rispetto alla traccia positiva di F sulla varietà caratteristica (quest'ultima stima è stata generalizzata indebolendo le ipotesi geometriche sul tipo simplettico della varietà caratteristica da Parenti e me nel 2006). In questa famiglia di disuguaglianze si ha un controllo dell'energia associata all'operatore in termini di norme Sobolev (ad iniziare con la metà dell'ordine dell'operatore nel caso della disuguaglianza di Gårding) via via più deboli nell'indebolirsi delle richieste. Si tratta di stime a priori che entrano profondamente nella geometria del fibrato normale alla varietà caratteristica dell'operatore e che dipendono (come nel caso di Fefferman-Phong) da un'analisi qualitativa del comportamento del simbolo dell'operatore su scale piccole ma non tali da violare il principio di indeterminazione di Heisenberg. Più precisamente, il problema è determinare il modo in cui immergere il cubo unitario tramite un diffeomorfismo simplettico in insiemi di sottolivello del simbolo dell'operatore, i cui jet di ordine fino al quarto siano sotto controllo in quella scala, in modo da evitare una sua deformazione così violenta da non potere essere il supporto di nessun *wave-packet* e quindi non potere soddisfare alcuna stima a priori ragionevole.

Il caso dei sistemi in questo ambito è ancora da sviluppare. Si sa che la disuguaglianza di Fefferman-Phong non vale per i sistemi (controesempi dovuti a L. Hörmander, R. Brummelhuis, e me stesso) e che si conoscono situazioni positive per sistemi 2×2 (risultati da me ottenuti qualche anno fa) che però non esauriscono il problema. Nel caso della disuguaglianza di Hörmander, essa è stata generalizzata da Parenti e me al caso di sistemi a caratteristiche doppie.

Un'altra area di indagine della analisi geometrica delle EDP è la *teoria spettrale* degli operatori differenziali, in special modo degli operatori di Schrödinger. Tipicamente, per operatori ellittici o debolmente degeneri (il cui simbolo principale abbia un segno o abbia valori contenuti in un cono convesso di $\mathbb{C}$), si ha che lo spettro dell'operatore è un insieme discreto. Studiare tale insieme è in generale difficile ma di ovvia grandissima importanza. Il desiderio di qualsiasi matematico o fisico è conoscere gli autovalori (di matrici o operatori in infinite dimensioni) insieme alla loro molteplicità algebrica e geometrica ed il relativo autospazio. Tipicamente questa conoscenza (anche in modo approssimato) rende possibile l'estensione delle tecniche della serie di Fourier, e più in generale dell'analisi armonica, a classi più ampie di operatori. In questo ambito uno dei più importanti osservabili spettrali è la funzione di Weyl, introdotta da Hermann Weyl per studiare, tra le altre cose, la velocità di convergenza dello sviluppo in autofunzioni. Essa conta il numero di autovalori dell'operatore, ripetuti per molteplicità, che sono più piccoli di un parametro λ (dimensionalmente una energia). L'asintotica per $\lambda \to +\infty$ di tale funzione è di fondamentale importanza e bellezza, sia nel caso del problema di Dirichlet o Neumann, per esempio, che in quello degli operatori ellittici su varietà compatte o ellittici globali, o ipoellittici. Si conoscono i termini principali dell'asintotica (che dipende dal volume nello spazio delle fasi dell'insieme sul quale il simbolo principale è più piccolo di λ, risultato dovuto a Weyl) ma lo studio dei termini di correzione è delicatissimo, profondo ed avvincente. I risultati importanti in questo campo sono molti, elencando L. Hörmander, M. Shubin, V. Ivrii, J. Chazarain, J. J. Duistermaat e V. Guillemin, B. Helffer e D. Robert ed altri, anche della scuola di Bologna soprattutto nel caso dei sistemi a coefficienti polinomiali. Tali sistemi sono rilevanti per una serie di ragioni, matematiche e fisiche (ottica quantistica, per esempio). Oltre alla funzione di Weyl, si vuole per esempio vedere anche come gli autovalori sono legati alle energie ed alle traiettorie periodiche del flusso bicaratteristico associato al simbolo principale e quali termini di ordine inferiore contano (tipicamente sui livelli isoenergetici della parte principale). Quando tutte le bicaratteristiche sono periodiche con periodo indipendente dall'energia (ciò che implica necessariamente, almeno nel caso di operatori polinomiali globalmente ellittici su $\mathbb{R}^n$, che l'ordine dell'operatore sia 2) si osserva nel caso di operatori scalari (risultato dovuto a Y. Colin De Verdière e in seguito a Duistermaat-Guillemin) un accumulo degli autovalori in intervalli centrati in una successione aritmetica descritta in termini dinamici e geometrici invarianti che converge a $+\infty$ con diametri infinitesimi. Nel caso dei *sistemi* di operatori differenziali, per esempio a coefficienti polinomiali, si hanno fenomeni simili per certe classi di sistemi (chiamati *oscillatori armonici non-commutativi*, introdotti da M. Wakayama e me alcuni anni fa, e più in generale per gli oscillatori armonici non-commutativi semiregolari *metrici*), ma anche fenomeni più complessi, in cui lo spettro è contenuto in una unione di intervalli centrati in una successione convergente a $+\infty$ (che però non è in generale aritmetica) con diametri infinitesimi. Di nuovo, la successione è costruita in termini della dinamica della parte principale e dei termini di ordine inferiore (fino a due ordini sotto) su insiemi di livello o sottolivello della parte principale. Queste problematiche (legate alle geodetiche periodiche della varietà sulla quale si sta lavorando, una volta che la scelta di una metrica di Riemann determina un operatore di Laplace-Beltrami del quale si studia lo spettro) sono esteticamente di grande e profonda bellezza, e spaziano dalla meccanica analitica, alla geometria simplettica, all'analisi ed alla geometria delle varietà. Relativamente a questa problematica è anche importante menzionare lo studio delle funzioni zeta-spettrali e della loro continuazione meromorfa, se possibile, a tutto il campo complesso. Esse sono osservabili dello spettro di un operatore (scalare o sistema) ellittico della massima importanza anche dal punto di vista della teoria dei numeri: si pensi alla formula di traccia di Selberg, o al fatto che la zeta spettrale dell'oscillatore armonico quantistico è un multiplo olomorfo della funzione zeta di Riemann.

Tali osservabili dello spettro non solo danno informazioni sulle quantità geometriche e dinamiche dell'operatore sotto studio, ma anche dello spazio delle fasi su cui si lavora.

Anche se gli argomenti toccati sopra non esauriscono l'ambito di studio dell'analisi geometrica nello spazio delle fasi, desidero infine notare che è attualmente di grande interesse trasferire l'approccio illustrato allo spazio delle fasi su strutture non-commutative (compatte e non) come i gruppi di Lie compatti o quelli nilpotenti. In questo caso la struttura dell'algebra di Lie è fondamentale e l'estensione dell'analisi microlocale e l'analisi geometrica delle EDP a queste situazioni anisotrope rappresenta un passo di fondamentale importanza. Qui lo spazio delle fasi è sostituito, nel caso di gruppi compatti, dal prodotto del gruppo G con l'insieme $\hat{G}$ delle classi di equivalenza delle rappresentazioni irriducibili unitarie (finito-dimensionali) del gruppo. Nel caso dei gruppi nilpotenti, la struttura è molto più complessa in quanto ci sono anche rappresentazioni infinito-dimensionali da considerare, e quindi anche più ricca ed ancor più interessante. Queste problematiche sono oggetto di ricerca attiva alla quale sta dando contributo in modo importante anche il gruppo di Bologna.

È importante anche notare che in generale lo studio delle problematiche sopra descritte nel caso di sistemi lineari di operatori differenziali è totalmente aperto, a parte i pochi risultati ai quali ho dato cenno in precedenza. La geometria nello spazio delle fasi di un sistema è molto ricca e complicata: nel caso di un sistema quadrato $N \times N$, la varietà caratteristica è l'insieme dei punti del cotangente su cui il determinante della parte principale è zero ed il determinante è una funzione massimamente non-lineare. Dunque il modo di interagire nello spazio delle fasi delle varie componenti di un sistema di EDP è altamente non-commutativo, sia dal punto di vista della natura non-commutativa di una matrice di simboli che da quello di come le varie componenti del simbolo e della parte sottoprincipale (che però qui e più complicata rispetto al caso scalare) si comportano rispetto alla varietà caratteristica del sistema.

Voglio in ultimo ricordare che a Bologna, grazie all'amicizia tra Cesare Parenti e Sandro Graffi, formatasi ai tempi studenteschi, si sviluppò anche una proficua interazione tra l'analisi geometrica delle EDP e la Fisica Matematica, nella forma dello studio delle proprietà semiclassiche di soluzioni delle equazioni di evoluzione di Schrödinger. In questo caso lo scopo è analizzare come le proprietà del problema di Cauchy di evoluzione (il flusso di Schrödinger) sia collegato alle traiettorie classiche dell'hamiltoniana di partenza (cioè prima della quantizzazione), e ad altre quantità simplettiche, quando la costante di Planck non è costante (!) ma tende a zero.

Questa dunque una breve sintesi di quali siano le problematiche di interesse dell'analisi geometrica delle EDP e di come un gruppo di studiosi di questo campo di ricerca, attivi e riconosciuti in ambito internazionale e composto anche da giovani scienziati, si sia formato qui a Bologna per opera della lungimiranza, gusto e valore scientifico di Cesare Parenti.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare Massimo Cicognani, Guido Drei, Serena Federico, Federico Ferri, Marcello Malagutti, Loredana Lanzani, Sandra Lucente e Davide Tramontana per avere letto una prima versione del lavoro ed i loro preziosi consigli. Desidero infine ringraziare Pierluigi Contucci per l'incoraggiamento a scrivere queste pagine e l'anonimo revisore per i suoi ottimi suggerimenti.

Equazioni differenziali sub-riemanniane del secondo ordine

Contributi della scuola bolognese

*Ermanno Lanconelli**

Questa nota presenta una breve rassegna di alcuni dei più significativi contributi della scuola di Analisi matematica bolognese alla teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita positiva. La rassegna riguarda il periodo di tempo compreso fra il 1980 e il 2012.

1. Introduzione

Gianfranco Cimmino, succeduto a Beppo Levi nel 1938 sulla prima cattedra di Analisi matematica dell'Università di Bologna, avviò la scuola matematica bolognese allo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali.

Cimmino era noto per avere introdotto – nel 1936 – un metodo che consentiva di dimostrare l'univoca risolubilità del problema Dirichlet per l'operatore di Laplace con dati al bordo tanto continui – come nel caso classico – quanto di p-esima potenza sommabile rispetto alla misura di superficie.

Nel 1951 il metodo di Cimmino, che potremmo chiamare delle *frontiere approssimanti*, fu esteso ed applicato da Bruno Pini allo studio del primo problema di valori al contorno per l'operatore del calore su *domini cilindrici*. Perseguendo questo fine, Pini fu naturalmente condotto a stabilire anzitutto una *formula di media* caratterizzante le funzioni caloriche così come la classica formula di media di Gauss caratterizza le funzioni armoniche: di quest'ultima formula, infatti, Cimmino aveva fatto un uso cruciale nel suo metodo delle frontiere approssimanti.

Ben presto Pini colse una qualche analogia fra il metodo di Cimmino e un metodo dapprima usato da Norbert Wiener per costruire una soluzione generalizzata – la ben nota, oggi, soluzione di Perron-Wiener – del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace su *aperti limitati arbitrari*. Questo suggerì a Pini la possibilità di studiare il primo

*Dipartimento di Matematica, Alma Mater Studiorum – Università di Bologna.
E-mail: ermanno.lanconelli@unibo.it

problema di valori al contorno per l'operatore del calore anche su *domini non cilindrici*, qualora si fosse riconosciuto che le funzioni caloriche godono di quelle proprietà basilari delle funzioni armoniche sulle quali si regge la classica teoria del potenziale, ed in particolare il metodo di Wiener.

Era noto da tempo che alcuni di questi *principi base*, quali ad esempio quello del *massimo*, sussistevano tanto per le funzioni armoniche, quanto per quelle caloriche. Ma non si conosceva un'analoga calorica della cruciale *disuguaglianza di Harnack* per le funzioni armoniche. Nel 1954 Pini scoprì la disuguaglianza di Harnack calorica, disuguaglianza oggi chiamata di Hadamard-Pini in quanto, nello stesso anno, ed indipendentemente da Pini, Hadamard aveva dimostrato la stessa identica disuguaglianza. Con questo strumento Pini costruì la *soluzione generalizzata di Wiener* per il *problema di Dirichlet* relativo all'*equazione del calore* su *aperti non cilindrici* dello spazio tempo due dimensionale.

Anche per questa costruzione Pini si avvalse in modo cruciale della sua formula di media calorica , ma risulta chiaramente nel suo lavoro che la formula di media viene usata *soltanto* per dimostrare un *teorema di compattezza* per famiglie di funzioni caloriche. E un simile teorema di compattezza, grazie al classico Teorema di Ascoli-Arzelà, può seguire "semplicemente" dalla equicontinuità delle famiglie di funzioni caloriche equilimitate, la quale equicontinuità può essere a sua volta dimostrata con un celebre metodo iterativo introdotto più tardi, nel 1961, da Jurgen Moser.

Questo metodo, nato per dimostrare la regolarità Hölderiana e la disuguaglianza di Harnack per le soluzioni delle classiche equazioni ellittiche e paraboliche del secondo ordine – in forma di divergenza – e con coefficienti anche molto poco regolari, si è rivelato molto duttile, e adattabile ad ampie classi di operatori alle derivate parziali del secondo ordine, con forma caratteristica semidefinita positiva.

Un primo adattamento del metodo di Moser ad una particolare ma significativa classe di tali operatori apparve nei primi anni '80 del 1900, ad opera di Bruno Franchi e del presente autore.

Generali operatori differenziali alle derivate parziali del secondo ordine con forma caratteristica semidefinita positiva erano apparsi in letteratura nei primi anni del 1900. Essi furono introdotti da Mauro Picone, che li chiamò *ellittico-parabolici*, e che dimostrò per essi il suo celebre *principio del massimo*.

L'interesse di questo tipo di equazioni per le scienze fisiche fu inizialmente evidenziato da A.D. Fokker, M. Planck e A.N. Kolmogorov: essi proposero modelli differenziali della fisica teorica e dei processi di diffusione fondati su equazioni ellittico-paraboliche di tipo Picone. Da allora, equazioni di questo tipo apparvero in diversi altri settori di ricerca – teorici ed applicati – che includono la teoria geometrica delle funzioni di più variabili complessa, la teoria delle equazioni alle derivate parziali in ambiti sub-Riemanniani, la teoria cinetica dei gas, i metodi matematici della finanza e della visione umana.

A partire dai primi anni '80 del 1900, a seguito dei lavori di Franchi e del presente autore citati qui sopra, nel Dipartimento di Matematica di Bologna si è sviluppata una intensa attività di ricerca che ha dato significativi contributi alla teoria delle equazioni differenziali in ambiti sub-Riemanniani, ed alle loro applicazioni alla finanza matematica e alla visione umana.

La presente nota contiene una breve descrizione dei principali risultati conseguiti da queste ricerche.

2. La generale classe degli operatori ellittico-parabolici di Picone

Si consideri l'operatore differenziale alle derivate parziali del secondo ordine

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\partial_{x_i}\partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(x)\partial_{x_j} + c(x) \tag{1}$$

dove i coefficienti $a_{i,j}, b_j$ e c sono funzioni reali definite in un aperto $E \subset \mathbb{R}^N$ e $x = (x_1, \dots, x_N)$ denota il punto di $\mathbb{R}^N$.

Diciamo che $\mathcal{L}$ è un operatore *ellittico-parabolico* nel senso di Picone in E se la matrice $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=1,\dots,N}$ è simmetrica e semidefinita positiva in ogni punto di E. La *forma caratteristica* di $\mathcal{L}$

$$q_{\mathcal{L}}(x, \xi) := \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j$$

è quindi non negativa per ogni $x \in E$ e $\xi \in \mathbb{R}^N$.

La proprietà di base, fondamentale, degli operatori $\mathcal{L}$ di Picone sta nel fatto che essi, sotto condizioni molto blande sui suoi coefficienti, verificano il cosiddetto *principio del massimo*, che consiste, grosso modo in questo: le soluzioni sufficientemente regolari di $\mathcal{L}u = 0$ in un aperto limitato Ω sono non negative in Ω se lo sono su $\partial\Omega$.

La classe degli operatori ellittico-parabolici è molto ampia: essa contiene i classici operatori ellittici ed i classici operatori ellittici e parabolici del secondo ordine, ma anche importanti operatori apparsi in letteratura molto tempo dopo i primi studi di Picone, quali ad esempio gli operatori di Kolmogorov-Fokker-Planck, i sub-laplaciani sui gruppi stratificati (in particolare sul gruppo di Heisenberg-Weyl), la notevolissima famiglia degli operatori di Hörmander.

Quella classe, tuttavia, contiene anche operatori molto "degeneri", quali ad esempio

$$\mathcal{L} = \partial_{x_1}^2 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, N \geq 2. \tag{2}$$

In generale quindi, un operatore ellittico-parabolico, solo in quanto tale, non avrà buone proprietà.

3. Da Fichera ad Hörmander

Dopo i classici lavori di Picone [P1- P2] contenenti principalmente, oltre alla dimostrazione del suo celebre principio del massimo, formule di maggiorazione e di confronto delle soluzioni, il primo studio sistematico di problemi al contorno per operatori ellittico-parabolici, fu condotto da Fichera. Nel 1956, in [F], Fichera dimostrò teoremi di esistenza di soluzioni "deboli" del problema di Dirichlet per operatori ellittico parabolici determinando la parte di frontiera – oggi chiamata *frontiera di Fichera* – sulla quale risulta corretto porre i dati al bordo.

Qualche anno dopo, vari risultati di esistenza e regolarità delle soluzioni di problemi al contorno per equazioni ellittico-paraboliche, furono dimostrati da Oleinik e Radkevic e da Kohn e Nirenberg (si veda la monografia [OR] per una ampia rassegna di questi risultati). I metodi usati da questi autori richiedono particolari proprietà della frontiera di Fichera e conducono a risultati di regolarità "interna" fortemente dipendenti dalla regolarità dei dati al bordo.

Le ricerche sulle proprietà di regolarità interna delle soluzioni, dipendenti soltanto dall'operatore $\mathcal{L}$, hanno prodotto risultati molto più interessanti, i più significativi dei quali ottenuti per operatori con soggiacenti, ricche strutture algebrico-geometrico di carattere sub-riemanniano. La pietra miliare dei risultati di queste ricerche è un celebre teorema, dimostrato da Hörmander nel 1967. Per enunciare questo profondo risultato occorrono varie premesse, che presenteremo nel seguente paragrafo.

4. Algebre di Lie di campi vettoriali

Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$ e sia data una N-pla di funzioni reali in Ω, $a_1, \dots, a_N$. Chiamiamo *campo vettoriale* in Ω di componenti $a_1, \dots, a_N$ l'operatore differenziale del primo ordine

$$X = \sum_{j=1}^{N} a_j(x)\partial_{x_j}.$$

Identifichiamo X con la N-pla $(a_1, \dots, a_N)$. Indichiamo con $T(\Omega)$ l'insieme dei campi vettoriali con componenti di classe C^∞ in Ω. Con la nostra convenzione sarà quindi $T(\Omega) = C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$.

Evidentemente, $T(\Omega)$ è uno spazio vettoriale; esso diventa un'algebra di Lie definendo, per $X, Y \in T(\Omega)$,

$$[X, Y] := XY – YX.$$

Chiamiamo algebra di Lie di campi vettoriali in Ω ogni sottospazio vettoriale di $T(\Omega)$ chiuso rispetto alla parentesi $[\cdot\,,\cdot]$ sopra definita. Se $\mathfrak{a}$ è un'algebra di campi vettoriali in Ω, e $x \in \Omega$, si definisce

$$\text{rango}\, \mathfrak{a}(x) := \dim\{X(x) : X \in \mathfrak{a}\}.$$

L'intersezione di una famiglia di algebre di campi vettoriali, se non vuota, è essa stessa un'algebra di campi vettoriali.

Data una n-pla $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ di campi vettoriali in Ω si chiama *algebra di Lie generata* da X, e si indica

$$\mathcal{L}ie\{X_1, \dots, X_n\},$$

la più piccola algebra di campi vettoriali contenente la famiglia X, *i.e.* l'intersezione di tutte le algebre di campi vettoriali contenenti X.

5. Il Teorema di Hörmander

Sia $X_1, \dots, X_n, X_0$ una famiglia di campi vettoriali di classe C^∞ in un aperto Ω di $\mathbb{R}^N$. L'operatore differenziale del secondo ordine

$$\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{n} X_j^2 + X_0 \tag{3}$$

ha forma caratteristica semidefinita positiva. Il celebre Teorema di Hörmander è il seguente.

Teorema 5.1 (Hörmander [H]) *L'operatore* (3) *è ipoellittico in* Ω *se*

$$\textit{rango}\, \mathcal{L}ie\{X_1, \dots, X_n, X_0\}(x) = N \textit{per ogni}\, x \in \Omega. \tag{4}$$

Ricordiamo che, per definizione , $\mathcal{L}$ è ipoellittico in Ω se ogni distribuzione u soluzione debole di

$$\mathcal{L}u = f \text{ in}\, \Omega$$

è di classe C^∞ in Ω se f è C^∞ in Ω.

Operatori differenziali *somme di quadrati più drift* verificanti la condizione del rango (4) vengono oggi chiamati *operatori di Hörmander*.

Il precedente teorema di ipoellitticità fu esteso da Oleinik e Radkevic ad operatori ellittico parabolici non necessariamente esprimibili in termini *somme di quadrati più drift*, precisamente nel modo seguente. Sia $\mathcal{L}$ un operatore ellittico-parabolico come in (1) con coefficienti di classe C^∞ in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Scriviamo $\mathcal{L}$ nel modo seguente

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}(a_{i,j}(x)\partial_{x_j}) + \sum_{j=1}^{N} \beta_j(x)\partial_{x_j} + c(x), \tag{5}$$

ove $\beta_j = b_j - \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} a_{i,j}$.

Si ponga

$$X_j := \sum_{i=1}^{N} a_{i,j}(x)\partial_{x_i}, j = 1, \dots, N$$

e

$$X_0 := \sum_{j=1}^{N} \beta_j(x)\partial_{x_j}.$$

Vale allora il seguente teorema.

Teorema 5.2 (Oleinik-Radkevic [OR]) *L'operatore* (5) *è ipoellittico in* Ω *se*

$$\textit{rango}\, \mathcal{L}ie\{X_1, \dots, X_N, X_0\}(x) = N \textit{ per ogni } x \in \Omega.$$

A seguito del Teorema di Hörmander, Elia M. Stein e la sua scuola aprirono un ampio settore di ricerca per lo studio degli operatori *somme di quadrati più drift* con metodi Analisi funzionale e Analisi armonica sui gruppi di Lie stratificati. Una esaustiva sistematica presentazione dei metodi e dei risultati di queste ricerche si trova nella recente notevole monografia di Marco Bramanti e di Luca Brandolini [BB]. Rimandiamo direttamente a quest'ultima monografia anche per una descrizione di vari contributi dati dalla scuola bolognese alla teoria generale degli operatori di Hörmander.

6. Metriche sub-Riemanniane: distanze di controllo

6.1 Premessa

Agli operatori ellittico-parabolici in forma con coefficienti non regolari i metodi sviluppati per gli operatori di Hormader – e di Oleinik e Radkevic – non sono, ovviamente, applicabili.

Riflettendo sui metodi di teoria del potenziale sui quali si basano le ricerche di Cimmino sull'equazione di Laplace e di Pini sull'equazione del calore, si giunge facilmente alla seguente convinzione: risultati di regolarità Hölderiana, e disuguaglianze di tipo Harnack per soluzioni *deboli* di equazioni ellittico paraboliche- anche con coefficienti poco regolari-permetterebbero di sviluppare una soddisfacente teoria per i problemi di valori al contorno relativi a quelle equazioni.

D'altra parte, nei primi anni '60 del 1900, Jurgen Moser [M] inventò un metodo iterativo che consente di ottenere regolarità hölderiana e disuguaglianze di tipo Harnack per equazioni ellittiche e paraboliche con coefficienti soltanto misurabili e limitati. Quel metodo iterativo si basa su alcune semplici proprietà geometriche della distanza euclidea e su un teorema di immersione di tipo Sobolev rispetto all'operatore gradiente euclideo.

Ora, dato un operatore ellittico parabolico $\mathcal{L}$, poiché la sua forma caratteristica $q_{\mathcal{L}}$ è semidefinita positiva, l'operatore differenziale

$$|\nabla_{\mathcal{L}} u|^2 := q_{\mathcal{L}}(x, Du),$$

ove D denota l'usuale gradiente euclideo, si presenta come (la norma) del *naturale gradiente* relativo a $\mathcal{L}$.

Resta da comprendere, volendo adattare il metodo di Moser a $\mathcal{L}$, se vi è una distanza che possa giocare per questo operatore lo sesso ruolo che la distanza euclidea gioca per gli operatori ellittici. Con Bruno Franchi, [FL1-2], all'inizio degli anni '80, capimmo che, almeno per una classe particolare, ma significativa, di operatori ellittici degeneri, una siffatta metrica esiste. Essa, in particolare ha $\mathcal{L}$ *-gradiente* limitato, così come la distanza euclidea ha limitato il gradiente euclideo.

Distanze come quella che costruimmo in [FL1-2], oggi vengono chiamate *metriche di controllo*, od anche *metriche di Carnot-Charatheodory*

6.2 Distanza di controllo: definizione generale

Sia assegnata una famiglia $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$ di campi vettoriali localmente lipschitziani in $\mathbb{R}^N$. Diciamo che una curva $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^N$ è una X*-traiettoria* se

$$\dot{\gamma}(s) = \sum_{j=1}^{N} a_j(s) X_j(\gamma(s)), \text{q.d. in } [0,T],$$

con $\sum_{j=1}^{N} a_j(s) \leq 1$. In questo caso poniamo $l(\gamma) := T$.

Dati $x, y \in \mathbb{R}^N$ indichiamo con $\mathcal{C}(x,y)$ la famiglia delle X-traiettorie con punto iniziale in x e punto finale in y. Diremo che $\mathbb{R}^N$ è X*-connesso* se $\mathcal{C}(x,y)$ è non vuoto per ogni $x, y \in \mathbb{R}^N$. In questo caso poniamo

$$d_X(x,y) = \inf\{l(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}(x,y)\}.$$

La funzione $(x,y) \mapsto d_X(x,y)$ è una distanza in $\mathbb{R}^N$ se $\mathbb{R}^N$ è X-connesso. Essa viene chiamata distanza di controllo (o di Carnot-Caratheodory) relativa alla famiglia X.

La distanza d_X è di tipo riemanniano, *i.e.* , è localmente equivalente alla distanza euclidea, se in ogni punto di $x \in \mathbb{R}^N$ la famiglia X contiene N campi linearmente indipendenti in x. Se la famiglia X contiene campi di classe C^∞ la cui algebra di Lie ha rango massimo in ogni punto, allora d_X è localmente hölderiana di esponente $\alpha \leq 1$: si veda il lavoro di Nagel-Stein-Weinger [NSW]. Nel 1982, qualche anno prima del lavoro [NSW], con Bruno Franchi costruimmo una distanza di controllo sub-riemanniana relativa ad una famiglia di campi vettoriali non regolari di tipo "diagonale", *i.e.* , del tipo

$$X_j = \lambda_j \partial_{x_j}, \quad j = 1, \ldots, N \tag{6}$$

dove le λ_j sono funzioni localmente lipschitziane strettamente positive fuori dagli iperpiani coordinati e che possono annullarsi con andamenti al più di tipo potenza (rimandiamo direttamente a [FL1] per una precisa definizione).

Fra le N-ple $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ considerate in [FL1-2] vi è, per indicare uno dei più semplici significativi esempi, la seguente

$$\lambda_j(x) = 1, \quad j = 1, \dots, p, \tag{7}$$

$$\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1, \dots, x_N) = |x_1|^{\alpha_1} \times \dots \times |x_p|^{\alpha_p}, \quad j = p+1, \dots, N. \tag{8}$$

La distanza di controllo relativa ai campi (6), che denoteremo per semplicità di notazione d_λ, ha la seguente proprietà: esiste una costante positiva c tale che

$$|B(x, 2r)| \le c|B(x, r)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^N, \quad \forall r > 0 \tag{9}$$

ove $|B(x, r)|$ denota la misura di Lebesgue della d_λ palla $B(x, r)$ di centro x e raggio r.

Questo dimostra che $(\mathbb{R}^N, d_\lambda)$ è uno *spazio di natura omogenea* nel senso di Coifman e Weiss [CW]. Su questo spazio si può quindi sviluppare, come mostrato in [CW], una ricca Analisi armonica.

Un'altra notevole proprietà delle metrica di controllo è la sua lipschitzianità lungo le X-traiettorie.

Nagel, Stein e Weinger dimostrarono successivamente, in [NSW], che entrambe le precedenti proprietà si estendono alle metriche di controllo relative a campi vettoriali di classe C^∞ generanti algebre di Lie di rango massimo in ogni punto.

7. Operatori X-ellittici

L'idea di associare ad operatori ellittico-parabolici con coefficienti poco regolari una distanza di controllo che fissi la "corretta" geometria soggiacente gli operatori stessi, idea apparsa per la prima volta in [FL1-2], fu precisata nel lavoro con Alessia Kogoj [LK] nel modo seguente. Sia $\mathcal{L}$ un operatore lineare del secondo ordine in forma di divergenza (*i.e.* , variazionale)

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}(a_{i,j}(x)\partial_{x_j}), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N. \tag{10}$$

Assumiamo i coefficienti $a_{i,j} = a_{j,i}$ limitati e misurabili Se $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ è una famiglia di campi vettoriali in $\mathbb{R}^N$, localmente lipschitziani e tali che, per una opportuna costante $c > 0$,

$$\frac{1}{c}\sum_{j=1}^{n}\langle X_j(x), \xi\rangle^2 \le \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \le c\sum_{i,j=1}^{n}\langle X_j(x), \xi\rangle^2$$

per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^N$, diremo che $\mathcal{L}$ è X-*ellittico* in Ω. Se X è la famiglia dei versori degli assi cartesiani, gli operatori X-ellittici sono i classici operatori ellittici.

Gli operatori di Hörmander, somme di quadrati di campi vettoriali $C^\infty, X_1, \ldots, X_n$, hanno parte principale X-ellittica rispetto alla famiglia $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$. In [FL1-2] erano stati introdotti e studiati operatori X-ellittici rispetto a campi diagonali come in (6). La classe di tutti questi ultimi operatori contiene quelli che in [KL] sono stati chiamati Δ_λ- Laplaciani, la cui famiglia contiene, a sua volta, quelli che oggi vengono chiamati operatori di Grushin o di Bouendi-Grushin.

Una naturale definizione di soluzione debole di una equazione X-ellittica $\mathcal{L} = 0$, con $\mathcal{L}$ come in (10), è la seguente. Anzitutto, se u e v sono funzioni di classe C^1 nell'aperto limitato Ω, definiamo formalmente

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\partial_{x_1} u(x)\partial_{x_j} u(x)\, dx. \tag{11}$$

Indichiamo con $W_X^\circ(\Omega)$ la chiusura dello spazio delle funzioni di classe C^1 con supporto compatto in Ω rispetto alla norma generata dal prodotto interno

$$\langle u, v\rangle_{\mathcal{L}} := \int_\Omega u(x)v(x)dx + a(u,v).$$

Con $W_X^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ indichiamo lo spazio delle funzioni u localmente di quadrato sommabile su Ω tali che $\varphi u \in W_X^\circ(\Omega)$ per ogni funzione φ di classe C^∞ con supporto compatto in Ω.

La forma bilineare $a(\cdot,\cdot)$ si prolunga con continuità sul prodotto cartesiano $W_X^{\mathrm{loc}}(\Omega)\times W_X^\circ(\Omega)$. Una funzione $u \in W_X^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è una soluzione debole dell'equazione

$$\mathcal{L}u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

se risulta

$$a(u,v) = 0 \quad \forall\ v \in W_X^\circ(\Omega).$$

8. Il metodo di Moser adattato agli operatori X-ellittici

Il metodo iterativo di Moser si adatta naturalmente agli operatori X-ellittici qualora siano soddisfatte le seguenti condizioni.

I. $\mathbb{R}^N$ è X-connesso e la metrica di controllo d_X verifica la condizione di duplicazione (7).

II. Valgono disuguaglianze di tipo Sobolev-Poincaré come le due seguenti

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le cr\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Xu|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

per qualche $p > 2$, per ogni d_X palla B di r ben contenuta in Ω, e per ogni funzione di classe C^1 col supporto compatto contenuto in Ω;

$$\int_B |u - u_B| \leq cr \int_{2B} |Xu|$$

per ogni d_X palla di raggio r la cui palla concentrica di raggio doppio $2B$ sia contenuta in Ω, e per ogni C^1-funzione in Ω. Qui u_B indica la media di u in B.

Nel lavoro [LK] sono date condizioni sufficienti affinché le precedenti due condizioni siano soddisfatte. Queste condizioni si applicano, in particolare, alle famiglie diagonali $X = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$ di Franchi-Lanconelli, ed anche a famiglie X di campi vettoriali di classe C^∞ verificanti la condizione di Hörmander del rango massimo. Nelle condizioni generali date in [LK] vale il seguente teorema.

Teorema 8.1 ([LK] , Teorema 4.2 e Teorema 4.3) *Sia $\mathcal{L}$ un operatore X ellittico in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ verificante le condizioni date in [LK]. Sia poi u una soluzione debole dell'equazione*

$$\mathcal{L}u = 0 \quad \textit{in } \Omega.$$

Allora esistono costanti $c > 0$ e $\alpha \in]0, 1[$, indipendenti da u, tali che

$$|u(x) - u(y)| \leq c \left(\frac{d_X(x, y)}{r} \right)^\alpha \sup_{2B} |u| \quad \forall\, x,\, y \in B$$

per ogni d_X palla B di raggio r la cui palla concentrica di raggio $2r$, $2B$, sia contenuta in Ω. Inoltre, se $u \geq 0$, allora

$$\sup_B u \leq \inf_B u$$

ancora per ogni d_X palla B tale che $2B$ sia contenuta in Ω.

9. Ulteriori sviluppi

Le idee e i metodi introdotti nei lavori con Bruno Franchi [FL1-2] hanno contribuito allo sviluppo, a Bologna, di programmi di ricerca volti allo studio di equazioni differenziali sub-riemanniane del secondo ordine che si presentano in vari contesti teorici ed applicativi. Elenchiamone alcuni, fra i più significativi.

9.1 Equazioni di Kolmogorov- Fokker-Plank

I prototipi di queste equazioni, che appaiono nella teoria cinetica dei gas e nello studio dei moti browniani, sono stati studiati nel lavoro [LP] con Sergio Polidoro. In questo lavoro si è dapprima mostrato l'invarianza degli operatori in esame rispetto a gruppi di Lie non commutativi, gruppi che fissano la corretta geometria soggiacente gli operatori stessi. Adattando a questa geometria i classici metodi dell'Analisi armonica – classica ed astratta – sono stati estesi a questo nuovo contesto i basilari principi comuni tanto alle classiche funzioni armoniche quanto a quelle caloriche. Vari lavori sono seguiti a [LP]: rinviamo direttamente alla nota [LPP] per una rassegna – ampia, sebbene non esaustiva – dei risultati in essi contenuti.

9.2 Equazioni della curvatura di Levi

Sono, queste, equazioni ellittico-paraboliche del secondo ordine quasilineari, – *i.e.* equazioni del tipo $\mathcal{L}u = 0$, con $\mathcal{L}$ strutturato come in (1), ma con i coefficienti dipendenti dalle derivate della funzione u – equazioni che sorgono nell'ambito della teoria delle funzioni di più variabili complesse. Le *linearizzazioni* di queste equazioni acquistano una struttura sub-riemanniana sulle funzioni u il cui grafico sia *strettamente pseudoconvesso*. Sfruttando questa cruciale proprietà Giovanna Citti in [C] dimostrò che le soluzioni pseudoconvesse con derivate seconde hölderiane, sono in realtà di classe di C^∞. Successivamente, in collaborazione con Annamaria Montanari e col presente autore, dimostrò che le soluzioni deboli in senso viscoso sono di classe $C^{2+\alpha}$, e quindi di classe C^∞ qualora siano strettamente pseudo convesse [CLM].

9.3 I sub-laplaciani

Sia $\mathbb{G}$ un gruppo di Lie stratificato in $\mathbb{R}^N$ e sia $X_1, \ldots, X_n$ una base del primo strato della sua algebra di Lie. L'operatore "somma di quadrati"

$$\Delta_{\mathbb{G}} := \sum_{j=1}^{n} X_j^2$$

è un operatore ipoellittico di Hörmander, chiamato *sub-laplaciano* su $\mathbb{G}$. Nella monografia [BLU], in collaborazione con Andrea Bonfiglioli e con Francesco Uguzzoni, abbiamo dapprima presentato una introduzione ai gruppi di Lie stratificati e alle loro algebre di campi vettoriali, muovendo da basilari ed elementari nozioni di algebra lineare e di calcolo differenziale per funzioni di più variabili reali. Successivamente, nella seconda parte della monografia, abbiamo sviluppato una esaustiva Teoria del potenziale per i sub-laplaciani, in completa analogia con quella relativa al classico operatore di Laplace.

Bibliografia

[BB] M. Bramanti - L. Brandolini: *Hörmander operators*, World Scientific Publishing, Co. Pte. Ltd., Singapore, (2023).

[BLU] A. Bonfiglioli - E. Lanconelli - F. Uguzzoni: *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*, Springer Monograph in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2007).

[C] G. Citti: *$C^\infty-$regularity of solution of the Levi equation*, Ann. Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linaire, 15, no, 4 (1998), 517-534.

[CLM] G. Citti - E. Lanconelli - A. Montanari: *Smoothness of Lipschitz continuous graph with non vanishing Levi curvature*, Acta Mathematica, 188 (2002) 87-128.

[CW] R. R. Coifman - G. Weiss: *Analyse harmonic non-commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol 22, Springer-Verlag, Berlin-New York, (1971).

[F] G. Fichera: *Sulle equazioni differenziali ellittico-paraboliche del secondo ordine*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 72, no 5, (1956), 1-30.

[FL1] B. Franchi - E. Lanconelli: *Une metrique associé à une classe d'opérateurs elliptiques degénerés*, Proceedings of the meeting *Linear Partial Differential and Psuedodifferential Operators*. Torino (1982), Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Special Issue (1984) 105-114.

[FL2] B. Franchi - E. Lanconelli: *Hölder Regularity Theorem for a classe of Linear Nonuniformy Elliptic Operators with Measurable Coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Cl. Sc. 10, n. 6 (1983), 523-541.

[H] L. Hörmander: *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Mathematica, 119 (1967), 337-346.

[KL] A. E. Kogoj - E. Lanconelli: *On semilinear $\Delta_\lambda-$Laplace equations*, Nonlinear Anal. 75, (2012), no. 11, 4198-4204.

[LK] E. Lanconelli - A. E. Kogoj: *X-elliptic operators and X-control distances*, Ricerche di Matematica, Napoli, II Special Issue in Memory of Ennio De Giorgi, 38 (2000), 223-243.

[LP] E. Lanconelli - S. Polidoro: *On a class of hypoelliptic evolution equations*, Rend. Sem. Univ. Politec. Torino, 52(1) 29-63 (1994). Partial differential equations, II (Turin 1993).

[LPP] E. Lanconelli - A. Pascucci - S. Polidoro: *Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and finance*, In *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics*, II. Vol 2 of Int. Math. Ser. (N.Y.), pages 243-265. Kluwer/Plenum, New York, 2002.

[M] J. Moser: *On Harnack's Theorem for Elliptic Differential Eqautions*, Comm. Pure Appl. Math., 24, 6 (1961) 577-591.

[NSW] A. Nagel - E. M. Stein - S. Wainger: *Balls and metrics defined by vectors fields, I. Basic properties*, Acta Mathematica, 155 (1985), 103-147.

[OR] O. A. Oleinik - E. V. Radkevic: *Second Order Equations With Nonnegative Characteristic Form*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1973), Translated from Itogi Nauki-Serija Matematika (1971).

[P1] M. Picone: *Maggiorazioni degli integrali di equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, Rend. Accad. Naz. Lincei, 5, no. 6 (1927), 138-143.

[P2] M. Picone: *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche del secondo ordine*, Annali Mat. Pura Appl., 74 (1929), 145-192.